Hódmezővásárhelyi Városi Matematikaverseny
2004. április 5.
A 9-10. osztályosok feladatainak javítókulcsa

1. feladat

Jelölje x a tervezett havi kiadást. Ekkor az első hónap tényleges költsége 1,15x, a második hónapé 1,1x. Tegyük fel, hogy p-szeresére kell a következő hónapok költségvetését változtatni, így a következő egyenlet adódik:
$12x = 1{,}15x + 1{,}1x + 10px$, melynek megoldása $p=0{,}975$.
Így a következő hónapokra 2,5%-kal kell a költségvetést visszafogni.

Pontozás: az egyenlet felállítása 2 pont, a helyes megoldás és a feltett kérdés megválaszolása további 2 pont. A feladat egyszerűsége folytán a részpontszámok további osztásának nincs értelme.

2.a feladat
az a=999 jelöléssel (nyilván más, ekvivalens jelölés is bevezethető) a kifejezés az alábbi alakba írható:

$$\frac{2a+6}{(a+2)(a+6)-a(a+4)},$$

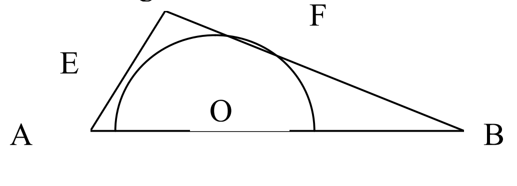
amiből a kijelölt műveletek elvégzése után a tört értékére 0,5-et kapunk.

Pontozás:
Helyes levezetés és megoldás esetén 2, egyébként 0 pont.

2.b feladat:
A bal oldalon a négyzetre emelés és a kijelölt műveletek elvégzése után $30-12\sqrt{6}$ –ot kapunk. Ennek a jobb oldallal történő összehasonlítása egyenértékű a 27 és $11\sqrt{6}$ mennyiségek összehasonlításával, ami, lévén mindkét oldal pozitív, egyenértékű a négyzeteik összehasonlításával. A hasonlítás eredményeképpen azt kapjuk, hogy a bal oldal a nagyobb.
Pontozás:
Helyes levezetés és megoldás esetén 2, egyébként 0 pont. Akár a fenti, akár ettől eltérő utat követ a versenyző, csak akkor adjunk pontot a feladatra, ha az egyenlőtlenségek ekvivalens átalakításaira vonatkozó vizsgálat kiderül a dolgozatból.

2.c feladat
Minkét hatványalap nevezőjét gyöktelenítjük, majd elvégezzük a köbre emeléseket. Eredményként 76-ot kapunk.
Pontozás:
Helyes levezetés és megoldás esetén 2, egyébként 0 pont.

3. feladat



Legyenek E és F azok az érintési pontok, amelyekben a félkör érinti a háromszög befogóit. Ekkor az OBF, AOE és ABC háromszögek hasonlóak, továbbá az OFCE síkidom négyzet, melynek minden oldala r (a félkör sugara). A kis háromszögek hasonlósága miatt $BF = \frac{4}{3} r$ és $AE = \frac{3}{4} r$. Így r értéke kiszámolható Pitagorasz tételének (a három derékszögű háromszög bármelyikére történő) alkalmazásával: $r = \frac{36}{5}$.

A befogók hosszára így $BF = \frac{84}{5}$ és $AE = \frac{63}{5}$ adódik.

A b) rész megoldásához észrevesszük, hogy az OFCE négyzet OC átlója egyben az ACB háromszög C-nél lévő szögének felezője is, így a C pontból az AO és OB szakaszok egyaránt 45 fokos szögben látszanak. Ezért a C pont a megfelelő látószög körívek metszéspontjaként szerkeszthető, minden esetben két megoldást kapunk.

Pontozás:
Az a) részben adjunk 3 pontot (kisebb, a feladatot nem egyszerűsítő hiba esetén 2 pontot) bármely olyan egyenlet felírásáért vagy észrevételért, amiből látszik, hogy a keresett adatok már egyszerű számolással kihozhatók (ez a fent vázolt megoldásban az r-re vonatkozó egyenlet felírását jelenti). A számolás helyes elvégzéséért és a kérdés megválaszolásáért 2 pont jár.

A b) részre maximum 4 pont adható. Egyet vonjunk le, ha a versenyző nem tér ki a megoldások számának vizsgálatára. Elfogadható az a megoldás is, hogy a versenyző a szerkesztéssel az a) rész számítását szimulálja, feltéve, hogy az egyes műveletekhez tartozó szerkesztési lépéseket indokolja.

4. feladat.

Ha m=0, akkor a második egyenlet x-4=0 alakú, ekkor x=4, y=4 az egyenletrendszer egyetlen gyöke.

(2 pont)

0-tól különböző m esetén y kifejezhető a második egyenletből és behelyettesíthető az elsőbe. Így az alábbi másodfokú egyenlethez jutunk:

$x^2 - 8x + 20 = \frac{x-4}{3} - 5$, általános alakra rendezés után: $mx^2 - (8m+1)x + 25m+4 = 0$. Az egyenlet diszkriminánsa $-36m^2 - 1$, ami $m = \pm\frac{1}{6}$ esetén lesz 0. $m = \frac{1}{6}$ esetén az egyenletrendszer gyöke x=7, y=13, $m = -\frac{1}{6}$ esetén pedig x=1, y=13.

(4 pont)

Megjegyzés: az m=0 eset kihagyása esetén az első részre adható 2 pontot teljes egészében levonjuk. A második részben kisebb számolási hibáért (ha a feladat ezáltal nem egyszerűsödik) 1 pontot, komolyabbért 2 pontot vonjuk le. Ugyancsak 1 pont vonandó le, ha a versenyző nem határozza meg a gyököt.

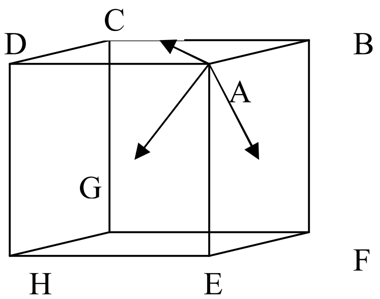
5. feladat

A kocka éleit egységnyinek tekintve a keresett tetraéder mindegyik éle $\frac{\sqrt{2}}{2}$ hosszúságú. A $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ térfogatképlet alkalmazásával ennek térfogata $\frac{1}{24}$ (a képlet szerepel a függvénytáblázatban, ezért levezetés nélkül alkalmazható).

(2 pont)

A keresett vektorok közül a triviális azokat meghatározni, amelyek a kezdőpontból lapátlón érhetők el (a C, F és H csúcsokba mutatókat), ezek rendre: 2**u**, 2**v** és 2**w**.

(1 pont)



A többi csúcsba mutató vektor meghatározásához jelöljük P-vel a kocka EFGH alaplapjának középpontját. Mivel ez a pont az FH szakasz felezőpontja, a P-be mutató vektor fele a H-ba és F-be mutatók összegének, vagyis $\overrightarrow{AP} = \mathbf{v}+\mathbf{w}$. Másrészt $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AE} + \mathbf{u}$, így $\overrightarrow{AE} = \mathbf{v} + \mathbf{w} - \mathbf{u}$. Hasonlóan:$\overrightarrow{AB} = \mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w}$ és $\overrightarrow{AE} = \mathbf{v} + \mathbf{w} - \mathbf{u}$. Végezetül a G-be mutató vektor pl. $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AE}$ összegegént kapható, így **u**+**v**+**w**-vel egyenlő.

(3 pont)

Megjegyzés: bár a feladat nem túl nehéz, a teljes pontszámért legalább a fenti részletességű indokláshoz ragaszkodjunk. A végeredmény indoklás nélküli felírásáért összesen 2 pontot vonjunk le. Ha a versenyző nem mindegyik vektort adja meg, 1-3 pontot vonjunk le aszerint, hogy melyeket hagyta el.

6. feladat

A keresett összeget úgy határozzuk meg, hogy az 1,2,3,4 számjegyekre rendre kiszámoljuk, melyik hányszor fordul elő az egyes helyiértékeken. Nyilvánvaló, hogy a teljes összeg megkapható, ha minden jegyre és minden helyiértékre összesítjük az adott jegy adott helyiértéken vett valamennyi előfordulását. Mivel mindegyik számjegyből ugyanannyi darab áll rendelkezésre, elég az egyiket megszámolni. Ha pl. az 1-esek helyén 1 áll, a maradék 7 számjegy összesen $\frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 630$ módon rendezhető sorba. Ez bármely másik jegyre és helyiértékre is igaz.

A keresett összeg tehát:

$$S = 630 \sum_{j=1,2,3,4} j \sum_{i=0}^{7} 10^{i-1} = 69999999300$$

A feladatra adható összesen 6 pontot 4:2 arányban célszerű felosztani a jó gondolatmenet és a számítás helyes elvégzése között, feltéve, hogy a megoldás elején elkövetett számítási hiba nem teszi lényegesen könnyebbé a feladatot.