Németh László Matematikaverseny, Hódmezővásárhely

2017. március 27.

A 9-10. osztályosok feladatainak javítókulcsa

Feladatok csak szakközépiskolásoknak

Sz 1.

Legyen az eredeti ötvözet tömege $M\ k$, ebből $0{,}82 \cdot M\ k$ vörösréz, $0{,}18 \cdot M\ k$ cink. A $18\ k$ cink hozzáadásával a vörösréz tömege nyilván nem változik, az aránya viszont 70%-ra csökken, ebből a következő egyenletet kapjuk:

$$0{,}82 \cdot M = 0{,}7 \cdot (M + 18)\text{, amiből átrendezéssel}$$

(2 pont)

$$M = 105$$

(1 pont)

Az eredeti ötvözet tömege tehát $105\ k$, amiből $86{,}1\ k$ vörösréz, $18{,}9\ k$ cink. Az új ötvözet tömege $123\ k$, ebből $86{,}1\ k$ vörösréz, $39{,}9\ k$ cink.

(2 pont)

Feladat összesen: 5 pont[1]

Sz 2.

Jelölje a a négyzet oldalát. Ismert[2], hogy ekkor az átló hossza $\sqrt{2}a$. Az átló 3 cm-rel hosszabb az oldalnál, amiből a következő egyenletet kapjuk:

$$\sqrt{2}a = a + 3\text{, rendezés után}$$

(2 pont)

$$a = \frac{3}{\sqrt{2}-1} = 3\left(\sqrt{2}+1\right) \approx 7{,}243\ c$$

(1 pont)

A négyzet oldala tehát $7{,}243\ c$ hosszú[3].

(2 pont)

Feladat összesen: 5 pont[4]

[1] Pontozás elve általában: 2 pont a megoldás irányába mutató egyenlet felállítása, 1 pont az egyenlet megoldása, 2 pont a feladat eredeti szövegére adott helyes válasz.
[2] A négyzet oldalának és átlójának aránya annyira közismert tény, hogy elfogadhatjuk további indoklás nélkül
[3] Elfogadható a $3\left(\sqrt{2}+1\right)$ alakban megadott megoldás is, a nevező gyöktelenítésének elmulasztása viszont nem.

Feladatok szakközépiskolásoknak és gimnazistáknak

G-Sz 3.

a) $7:00$ –tól $8:45$-ig összesen $97+76=173\ k$ -t tettünk meg 1,75 óra alatt, így a teljes úton az átlagsebességünk $\frac{1}{1,7} \approx 98,9\ k \quad /h$ volt.

(2 pont)

b) Ha nem álltunk volna meg 10 percre, $8:35$-kor értünk volna Pestre, a menetidő $\frac{9}{6} \approx 1,583$ óra, az átlagsebesség pedig $\frac{1}{1} \cdot 12 \approx 109,3\ k \quad /h$ lett volna.

(2 pont)

c) Ha szerettük volna behozni a tankolás miatti időveszteséget, akkor a Kecskeméttől hátra lévő $76\ k$ utat 30 perc alatt kellett volna megtenni, ami $152\ k \quad /h$ átlagsebességet igényelt volna, ami azonban veszélyes és szabálytalan! A feladat tanulsága, hogy az indulás időpontjának megválasztásakor be kell a megállások idejét kalkulálni, mert az időveszteséget csak a sebesség irreális növelése árán lehetne behozni!

(2 pont)

Feladat összesen: 6 pont

G-Sz 4.

Jelölje n az osztály létszámát, $n_{1,2}, n_{1,3}, n_{2,3}$ pedig azoknak a tanulóknak a számát, akik rendre csak az első és második, csak az első és harmadik, illetve csak a második és harmadik kiránduláson vettek részt. Tudjuk, hogy minden tanuló részt vett legalább két kiránduláson, 12-en pedig mindegyiken. A legegyszerűbb egyenletrendszert akkor kapjuk, ha észrevesszük, hogy a feltételek miatt azok a tanulók, akik nem vettek részt az első kiránduláson, ugyanazok, akik csak a másodikon és harmadikon vettek részt. Hasonló állítás fogalmazható meg a másik két kirándulásra is, így érvényesek a következő összefüggések:

$$n_{2,3} = (1-0,7)n = 0,3n$$

$$n_{1,3} = (1-0,8)n = 0,2n$$

$$n_{1,2} = (1-0,9)n = 0,1n$$

$$n = n_{1,2} + n_{1,3} + n_{2,3} + 12$$

(3 pont)

A fenti egyenletrendszer megoldása: $n_{1,2} = 3,\ n_{1,3} = 6,\ n_{2,3} = 9, n = 30.$

[4] Pontozás elve általában: 2 pont a megoldás irányába mutató egyenlet felállítása, 1 pont az egyenlet megoldása, 2 pont a feladat eredeti szövegére adott helyes válasz (nevező gyöktelenítéssel, vagy közelítő tizedestört kiszámításával, legalább 3 értékes jegyre).

(3 pont)

A teljes osztálylétszám 30, az egyes kirándulásokon pedig rendre 21, 24, illetve 27 tanuló vett részt.

(1 pont)

Feladat összesen: 7 pont[5]

G-Sz 5.

a) Jelöljük meg a helyeket váltakozva piros és kék színekkel és figyeljük meg, hogy egy-egy lépést követően hány tányér van piros színű helyen. Kezdetben három tányér piros, három pedig kék színű helyen található. Mivel minden lépésben két tányért teszünk át szomszédos helyre, egy-egy tányér áthelyezése nyilván mindig színváltással jár, két tányér egyidejű áthelyezése két színváltással.

Két színváltás a piros helyen álló tányérok számával három dolog tehet: kettővel növeli, kettővel csökkenti, vagy változatlanul hagyja. Bármelyik eset áll is elő, a piros mezőn álló tányérok száma két tányér áthelyezésekor páros számmal változik. Mivel ez a szám kezdetben páratlan volt, tetszőleges számú lépés után is az marad.

Ha hat tányér van egymáson, a piros helyen álló tányérok száma 0, vagy 6, ez a helyzet viszont nem következhet be, így **a hat tányér nem kerülhet egy oszlopba**.

(4 pont)

b) Megmutatjuk, hogy négy tányér esetén az áthelyezés megoldható, pl. az alábbi lépéseken át (ld. az ábrát):

- az első lépésben az 1. és 3. tányért a 2. helyre tesszük
- a második lépésben a 2. helyről visszateszünk egy tányért az 1. helyre, a 4. helyen lévőt pedig átrakjuk a 3. helyre
- a 3. lépésben az 1. tányért jobbra, a 3. helyen lévőt balra téve elérjük, hogy mind a négy tányér a második helyen legyen

(4 pont)

Feladat összesen: 8 pont[6]

G-Sz 6.

Ismert, hogy egy n oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege $(n-2)\cdot 180°$. Tegyük fel, hogy a sokszögnek k darab tompaszöge van. Mivel a tompaszögek 180 foknál kisebbek, a többi szög pedig legföljebb 90 fokos lehet, a szögek összegére a következő egyenlőtlenség írható fel:

[5] 3 pontot adunk bármilyen „használható” egyenletrendszer felállításáért, 3 pontot annak megoldásáért, 1 pontot pedig a helyes szöveges válaszért. Részpontszámok adhatók. Nem fogadható el teljes értékű megoldásnak, ha a versenyző „megtippeli” az eredményt, a levezetésből ki kell derülnie a megoldás unicitásának.

[6] Ahogy más hasonló feladatok esetén, nyilván más gondolatmentet is elfogadunk teljes értékű bizonyításnak, feltéve, hogy helyes és kellően indokolt.

$$(n-2) \cdot 180° \leq k \cdot 180° + (n-k) \cdot 90°$$

Tegyük hozzá (a későbbiek szempontjából ez fontos lesz), hogy egyenlőség csak akkor fordulhat elő, ha $k = 0$, ha ugyanis van tompaszög, annak 180 foknál határozottan kisebbnek kell lennie.

(4 pont)

Rendezve a fenti egyenlőtlenséget k-ra $k \geq n - 4$ adódik (azzal a további feltétellel, hogy pozitív k esetén szigorú egyenlőtlenség áll).

(1 pont)

Vizsgáljuk meg a kapott feltételt. A kérdéses sokszög nyilván lehet háromszög, vagy négyszög. Az első érdekes kérdés, hogy $n = 5$ előállhat-e. Ekkor $k > 1$, vagyis egy ötszögnek van legalább két tompaszöge. Ezek viszont nem föltétlen szomszédosak: tekintsük pl azt az ABCDE ötszöget, amelyben A-nál, B-nél és E-nél derékszög, C-nél és D-nél pedig 135 fokos szögek vannak.

Legyen most $n = 6$, ekkor $k > 2$, vagyis egy hatszögben mindig lesz legalább három tompaszög. Előfordulhat viszont, hogy ezek között sem lesz két szomszédos: vegyük pl. azt a hatszöget, amit úgy kapunk, hogy egy egyenlő oldalú háromszög oldalaira (mint átfogókra) kifelé egyenlő szárú derékszögű háromszögeket emelünk. Ebben a hatszögben váltakoznak a derékszögek és 150 fokos szögek.

(3 pont)

Ha $n \geq 7$, akkor $k > n - 4$ miatt $k > \left[\frac{n}{2}\right]$ is teljesül, más szóval, a csúcsok több, mint felénél lesz tompaszög, vagyis biztosan lesz két szomszédos tompaszög.

Összefoglalva: ha egy konvex sokszögben nincs két szomszédos tompaszög, az oldalak száma legföljebb 6 lehet.

(2 pont)

Feladat összesen: 10 pont[7]

Feladatok <u>csak gimnazistáknak</u>

G 7.

Láthatjuk, hogy a bal oldal akkor értelmezett, ha $\boldsymbol{x \geq 0}$ és $\boldsymbol{x \geq a}$ egyszerre teljesülnek[8]. Írjuk az egyenletet az alábbi alakba:

$$\sqrt{x-a} = 2 - \sqrt{x}$$

[7] A pontozás szempontjából lényeges momentumok a következők: a k-ra vonatkozó egyenlőtlenség felállításáért és megoldásáért 5 pontot, a további elemzésért másik 5 pontot adunk. Természetesen más gondolatmenet is elfogadható, feltéve, hogy a versenyző részletesen indokolva megmutatja, hogy n=6 a határ (tehát igazolnia kell, hogy a kérdéses sokszög hatszög még lehet, de hétszög és annál nagyobb oldalszámú sokszög már semmiképpen nem). Nem fogadható el teljes értékűnek, ha a versenyző a hétszöget kizárja, de a bizonyítás nem általánosítható n nagyobb értékeire.

[8] Az értelmezési tartományra és a rendezés során elvégzett átalakításokra vonatkozó feltételeket a feladat végén elemezzük. Vastagon szedve jelöljük az ellenőrzendő kritériumokat.

Ha a bal oldal nemnegatív, azaz a gyökre később majd $\boldsymbol{x \leq 4}$ teljesül, akkor mindkét oldalt négyzetre emelhetjük (az $x \geq a, x \geq 0$ feltételeket már kikötöttük). Azokat a gyököket, amik ezt a feltételt nem teljesítik, hamis gyökként el kell majd vetnünk. Ezzel a feltétellel négyzetre emelhetünk:

$$x - a = 4 - 4\sqrt{x} + x, \text{ rendezve:}$$

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{a}{4}$$

A fenti egyenletnek csak akkor van gyöke, ha a jobb oldal nemnegatív, vagyis $\boldsymbol{a \geq -4}$**.** Ekkor az egyenlet gyöke (ami egyben az eredeti egyenlet gyöke is, feltéve, hogy a korábban kirótt feltételek fennállnak):

$$x = \left(1 + \frac{a}{4}\right)^2 = 1 + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{16}$$

(4 pont)[9]

A fenti megoldás bizonyos esetekben hamis gyökökre vezet, ezek kizárásához ellenőriznünk kell a korábban megállapított feltételeket.

a) $\boldsymbol{x \geq 0}$: minden a-ra teljesül, hiszen a gyök egy valós kifejezés négyzete

(1 pont)[10]

b) $\boldsymbol{x \geq a}$: azt kell megvizsgálnunk, a mely értékei mellett igaz az $1 + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{\mathbf{1}} \geq a$ egyenlőtlenség, ami ekvivalens az $1 - \frac{a}{2} + \frac{a^2}{\mathbf{1}} \geq 0$ egyenlőtlenséggel. Vegyük észre, hogy a bal oldal nem más, mint $\left(1 - \frac{a}{4}\right)^2$, ami egy valós kifejezés négyzete, így $x \geq a$ minden a-ra teljesül.

(2 pont)

c) $\boldsymbol{x \leq 4}$: Meg kell vizsgálnunk, hogy az a paraméter mely értékei mellett teljesíti az egyenlet gyöke ezt a feltételt. Ehhez az $x = 1 + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{\mathbf{1}} \geq 4$ másodfokú egyenlőtlenséget kell megoldanunk. Rendezés és a másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazása után kapjuk, hogy $a \in [-12,\ 4]$, vagyis amennyiben az a paraméter nem teljesíti a $-12 \leq a \leq 4$ feltételt, akkor a kapott gyököt el kell vetni.

(3 pont)

d) Teljesülnie kell még az $\boldsymbol{a \geq -4}$ feltételnek: amennyiben nem teljesül, az eredeti egyenletnek nincs gyöke.

(1 pont)

[9] A 4 pont akkor is jár a versenyzőnek, ha a szükséges diszkusszió nélkül (helyesen) kiszámolja a gyököt. Kisebb számolási hibákért 1-2 pontot vonjunk le.

[10] Az a)-d) ellenőrzések mindegyikéért akkor jár a pont, ha a dolgozatból kiderül, hogy a versenyző érdemben és helyesen megvizsgálta a kérdéses feltételeket. Ha számítási hiba következtében a versenyző „leegyszerűsíti” a feladatot, az elmaradó ellenőrzésekért nem jár pont.

Összefoglalva a fentieket: az eredeti egyenletnek **akkor és csak akkor van valós gyöke, ha $\boldsymbol{a} \in [-\boldsymbol{4},\ \boldsymbol{4}]$, ekkor az egyetlen gyök $\boldsymbol{x} = \left(\boldsymbol{1} + \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{4}}\right)^{\boldsymbol{2}}$**.

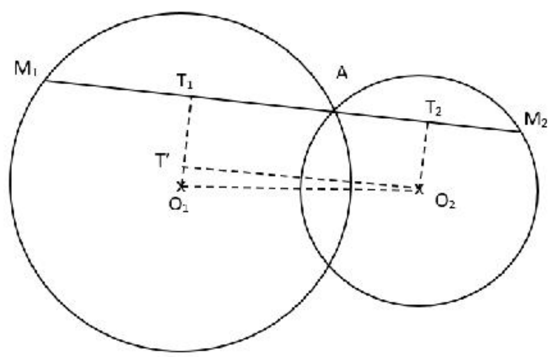
(1 pont)[11]

Feladat összesen: 12 pont[12]

G 8.

Vegyünk föl egy, az A metszésponton átmenő közös M_1M_2 szelőt és állítsunk rá merőlegeseket a körök O_1, O_2 középpontjaiból. Legyenek rendre T_1, T_2 a merőlegesek talppontjai. Vegyük észre, hogy O_1T_1 szimmetriatengelye az M_1O_1A egyenlő szárú háromszögnek, ezért $|T_1A| = \frac{|M_1A|}{2}$. Hasonló okok miatt $|T_2A| = \frac{|M_2A|}{2}$, így a T_1T_2 szakasz hossza pontosan fele a M_1M_2 szelő hosszának. Elegendő tehát azt vizsgálni, milyen feltételek mellett lesz T_1T_2 maximális.

(4 pont)[13]



Tegyük most fel, hogy M_1M_2 nem párhuzamos O_1O_2-vel (vagyis az ún. centrálissal) és válasszuk ki az O_1T_1, O_2T_2 szakaszok rövidebbikét. Az általánosság megsértése nélkül feltehető, hogy ez az ábra szerinti O_2T_2. Állítsunk O_2-ből merőlegest O_1T_1-re, legyen ennek talppontja T'. Világos, hogy $O_2T'T_1T_2$ téglalap, továbbá az is nyilvánvaló, hogy a vizsgált T_1T_2 szakasz hossza egyezik az O_1O_2T'derékszögű háromszög befogójának hosszával. Ha tehát a szelő nem párhuzamos a centrálissal, akkor hossza kisebb, mint a centrális hosszának kétszerese. A gondolatmenet alapján az is nyilvánvaló, hogy a T_1T_2 (és így a szelő) hossza akkor a lehető legnagyobb, ha az O_1O_2T' háromszög elfajuló, azaz a szelő párhuzamos a centrálissal. Ekkor a szelő hossza a centrális hosszának kétszerese.

(4 pont)

Feladat összesen: 8 pont

[11] Ragaszkodjunk ahhoz, hogy a versenyző egyértelmű, világos összefoglalását adja a meglehetősen összetett diszkussziónak

[12] Bár elsőre meglepő, de nem véletlen, hogy az $x = \left(1 + \frac{a}{4}\right)^2$ megoldás kiszámításáért a pontszám kb. harmada jár, a többi a diszkusszió – valóban az utóbbi a feladat érdemi része

[13] Más gondolatmenet esetén akkor jár a 4 pont, ha a versenyző hasonló, a megoldást érdemben elősegítő megállapítást tesz.