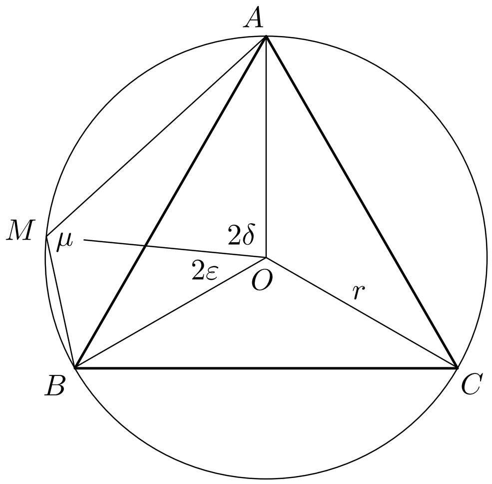
XXV. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny
Budapest, 2016. március 11–15.

Megoldások
12. osztály

1. feladat Az ABC szabályos háromszög köré írt körön a rövidebb AB íven kijelölünk egy M pontot. Bizonyítsa be, hogy $AB^2 \geq 3 \cdot AM \cdot MB$.

Olosz Ferenc (Szatmárnémeti)

1. megoldás: Használjuk az ábra jelöléseit.



Fejezzük ki AB^2-et az ABM háromszögből a koszinusztétellel: (1 pont)

$$AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2 \cdot AM \cdot MB \cdot \cos\mu,$$

ahol μ jelöli az AMB szöget. (1 pont)

Mivel az $AMBC$ négyszög húrnégyszög, és az ACB szög 60 fokos, ezért $\mu = 120°$, és így $\cos\mu = -1/2$. (1 pont)

Innen $AB^2 = AM^2 + MB^2 + AM \cdot MB$. (1 pont)

A jobb oldalt átalakítjuk:

$$AB^2 = AM^2 + MB^2 + AM \cdot MB = (AM - MB)^2 + 3 \cdot AM \cdot MB. \qquad (3 \text{ pont})$$

Mivel $(AM - MB)^2 \geq 0$, innen a kívánt $AB^2 \geq 3 \cdot AM \cdot MB$ egyenlőtlenség adódik.

(2 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: Az utolsó $3+2$ pontos rész helyettesíthető a négyzetes és a mértani közép közötti $\sqrt{\dfrac{AM^2 + MB^2}{2}} \geq \sqrt{AM \cdot MB}$ egyenlőtlenségre történő hivatkozással is.

2. megoldás: Használjuk az előző megoldás ábráját. Legyen a körülírt kör sugara r, középpontja O, és fejezzük ki az AM, MB, AB szakaszok hosszát r és a $2\delta = AOM$, $2\varepsilon = MOB$, valamint AOB szögek segítségével. (1 pont)

Az AOB szög 120 fokos, és így $\delta + \varepsilon = 60°$. (1 pont)

Az AOM, MOB és AOB egyenlő szárú háromszögekből

$$AM = 2r\sin\delta, \quad MB = 2r\sin\varepsilon, \quad AB = 2r\sin 60° = r\sqrt{3}. \qquad (2 \text{ pont})$$

A bizonyítandó egyenlőtlenség ennek megfelelően

$$3r^2 \geq 3\cdot 4\cdot r^2\sin\delta\cdot\sin\varepsilon, \qquad \text{azaz} \quad \frac{1}{4} \geq \sin\delta\cdot\sin\varepsilon. \qquad (1 \text{ pont})$$

Az ismert trigonometrikus összefüggés alapján

$$\sin\delta\cdot\sin\varepsilon = \frac{\cos(\delta-\varepsilon)-\cos(\delta+\varepsilon)}{2}. \qquad (2 \text{ pont})$$

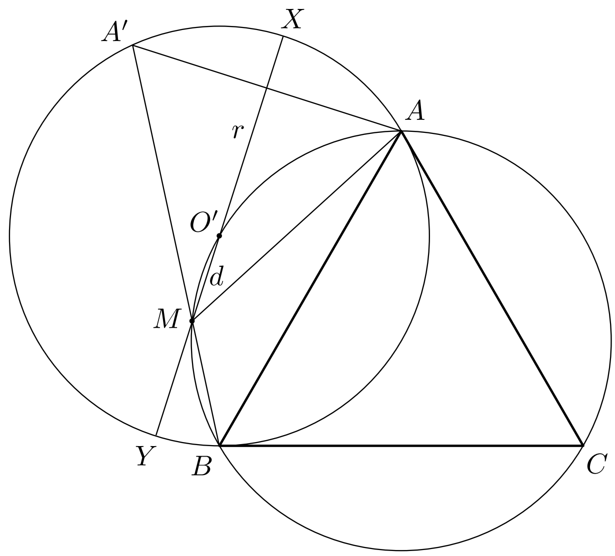
A jobb oldalt tovább alakítva, majd felülről becsülve a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\sin\delta\cdot\sin\varepsilon = \frac{\cos(\delta-\varepsilon)-\cos 60°}{2} \leq \frac{1-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}. \qquad (2 \text{ pont})$$

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

3. megoldás: Használjuk az ábra jelöléseit.



Hosszabbítsuk meg az MB szakaszt M-en túl MA hosszúsággal, így az A' pontot kapjuk. Mivel az AMB szög 120 fokos, ezért az AMA' szög 60 fokos, tehát $AM = A'M$ miatt az AMA' háromszög szabályos, és így az $AA'B$ szög is 60 fokos. (3 pont)

Ez azt jelenti, hogy A' rajta van az AB fölé írt (másik) 60°-os látóköríven. (1 pont)

Ez az ACB ív tükörképe, sugara tehát szintén r. (1 pont)

Ez utóbbi kör középpontját jelölje O', az $O'M$ egyenes (illetve $O' = M$ esetén, tetszőleges átmérő) messe ezt a kört az X és Y pontokban. Mivel az M ponton át húzott szelőkön a szelődarabok szorzata állandó, ezért

$$AM \cdot MB = A'M \cdot MB = XM \cdot MY = (r-d)(r+d) = r^2 - d^2 \le r^2,$$

ahol d az O' és M pontok távolsága. (3 pont)

Mivel $r^2 = AB^2/3$, az előző egyenlőtlenségből a kívánt $3 \cdot AM \cdot MB \le AB^2$ összefüggés adódik. (1 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

2. feladat Az ötös lottón 5 számot kell megjelölni az $1, 2, \ldots, 90$ számok közül. Peti egy olyan szelvénnyel játszik, amelyen az 5 megjelölt számban az $1, 2, \ldots, 9$ számjegyek mindegyike pontosan egyszer szerepel, és a 0 számjegy nem fordul elő. Petinek szól a barátja, hogy az aznapi sorsoláson ilyen 5 számot húztak ki, de magukról a kihúzott számokról nem tud semmit sem mondani. Mi a valószínűsége annak, hogy Petinek legalább 4 találata van?

Remeténé Orvos Viola (Debrecen)

Megoldás: Határozzuk meg az ilyen típusú húzások számát. Az öt kihúzott számból egy egyjegyű, a többi kétjegyű. (1 pont)

Ha az egyjegyű szám a 9-es, akkor a kétjegyűeket egymás után leírva egy 8 különböző számjegyből álló számsorozatot kapunk, ez 8!-féle lehet. (1 pont)

Ha az egyjegyű szám nem a 9-es, akkor 8-féle lehet, a 9-es pedig csak a kétjegyűek egyes helyiértékénél szerepelhet, vagyis 4 helyen, a maradék 7 számjegy 7!-féleképpen tehető le, ez összesen $8 \cdot 4 \cdot 7! = 4 \cdot 8!$ lehetőség. (1 pont)

Mivel a kétjegyű számok egymás közötti sorrendje nem számít, ezért a fent kapott két szám összegét 4!-sal osztani kell. (1 pont)

Innen a lehetséges húzások száma $\dfrac{8! + 4 \cdot 8!}{4!} = \dfrac{5 \cdot 8!}{4!} (= 8400)$, tehát $\dfrac{4!}{5 \cdot 8!}$ annak a valószínűsége, hogy Petinek 5 találata van. (1 pont)

Ha Peti egyjegyű száma a 9-es, akkor 4 találat úgy lehetséges, hogy Peti egyik kétjegyű száma helyett annak „fordítottját” húzták ki (tehát a két számjegyet felcserélték), ez négyféleképpen valósulhat meg. (1 pont)

Emiatt ekkor a 4 találat 4-szer olyan valószínű, mint a telitalálat, vagyis a legalább 4 találat valószínűsége $\dfrac{5 \cdot 4!}{5 \cdot 8!} = \dfrac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = \dfrac{1}{1680}$. (1 pont)

Ha Petinél valamelyik kétjegyű számban szerepel a 9-es, akkor 4 találat úgy lehetséges, hogy Peti valamelyik másik kétjegyű száma helyett annak „fordítottját” húzták ki (tehát a két számjegyet felcserélték), ez háromféleképpen valósulhat meg. (1 pont)

Emiatt ekkor a 4 találat 3-szor olyan valószínű, mint a telitalálat, vagyis a legalább 4 találat valószínűsége $\dfrac{4 \cdot 4!}{5 \cdot 8!} = \dfrac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 10} = \dfrac{1}{2100}$. (1 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: Ha a feladatot úgy értelmezzük, hogy anélkül kell megmondani a valószínűséget, hogy tudnánk, hol van Petinél a 9-es, akkor a teljes valószínűség tétele alapján az imént kiszámolt két valószínűség súlyozott átlagát kell vennünk aszerint, hogy a kétféle feltétel bekövetkezésének mi a valószínűsége. A levezetés alapján ez az arány $1:4$, tehát a kérdéses valószínűség $\frac{1}{5} \cdot \frac{5 \cdot 4!}{5 \cdot 8!} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4 \cdot 4!}{5 \cdot 8!} = \frac{1}{2000}$.

3. feladat Igazolja, hogy $1992 \cdot 2012 \cdot 2016 \cdot 2022 \cdot 2042 + 5^6$ összetett szám.

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

Megoldás: Írjuk át az összeg első tagját képező öttényezős szorzatot a következő alakba:

$$(2017 - 25)(2017 - 5)(2017 - 1)(2017 + 5)(2017 + 25). \qquad \text{(3 pont)}$$

A beszorzásokat elvégezve minden tag osztható lesz 2017-tel, kivéve a

$$(-25) \cdot (-5) \cdot (-1) \cdot 5 \cdot 25 = -5^6$$

tagot. (3 pont)

Ennek alapján az eredményhez 5^6-t hozzáadva egy 2017-tel osztható (és 2017-nél nagyobb) számot kapunk, ami emiatt szükségképpen összetett. (3 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

4. feladat Igazolja, hogy ha a P polinom minden együtthatója nemnegatív valós szám, akkor $x > 0$ esetén $P(x)P(\frac{1}{x}) \geq (P(1))^2$.

Kekeňák Szilvia (Kassa)

Megoldás: Legyen $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, ahol $a_k \geq 0$ minden k-ra. Ekkor

$$P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \cdot \sum_{\ell=0}^{n} \frac{a_\ell}{x^\ell}. \qquad \text{(1 pont)}$$

A szorzás elvégzése során $a_k a_\ell x^{k-\ell}$ alakú tagok keletkeznek, ahol $k, \ell = 0, \ldots, n$. Ha $k = \ell$, akkor ebből a_k^2 adódik, különben pedig a k, ℓ indexek cseréjével párba állíthatunk tagokat. Így

$$P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k^2 + \sum_{0 \leq \ell < k \leq n} a_k a_\ell \left(x^{k-\ell} + \frac{1}{x^{k-\ell}}\right). \qquad \text{(3 pont)}$$

A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alapján pozitív x-ekre

$$x^{k-\ell} + \frac{1}{x^{k-\ell}} \geq 2\sqrt{x^{k-\ell} \cdot \frac{1}{x^{k-\ell}}} = 2. \qquad \text{(2 pont)}$$

Ebből az együtthatók nemnegativitásának felhasználásával kapjuk, hogy $x > 0$ esetén

$$P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) \geq \sum_{k=0}^{n} a_k^2 + 2 \cdot \sum_{0 \leq \ell < k \leq n} a_k a_\ell = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^2 = (P(1))^2. \qquad \text{(3 pont)}$$

(+1 pont)

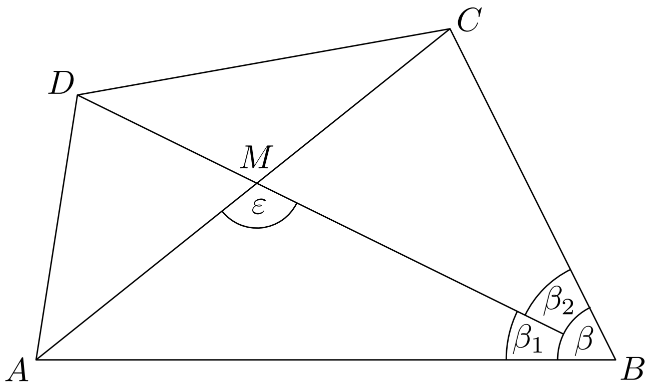
Összesen: 10 pont

Megjegyzés: A számtani és mértani közepek egyenlőtlenségére való hivatkozás helyettesíthető azzal, hogy egy pozitív szám és reciprokának összege legalább 2.

5. feladat Egy konvex négyszög oldalainak és átlóinak hossza racionális szám. Mutassa meg, hogy az átlókat a metszéspontjuk racionális hosszúságú szakaszokra osztja.

Tóth Sándor (Kisvárda)

Megoldás: Az ábra jelöléseit használjuk: az $ABCD$ négyszögben az átlók metszéspontja M, az ABM, CBM, CBA és AMB szögek rendre β_1, β_2, β, illetve ε. Az AM szakaszról látjuk be, hogy a hossza racionális szám, a többi ugyanígy igazolható.



Mivel $AC = AM + MC$ hossza racionális, elég az AM/MC arányról megmutatni, hogy racionális. (1 pont)

Az ABM és CBM háromszögekre felírjuk a szinusztételt:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\varepsilon}; \qquad \frac{MC}{BC} = \frac{\sin\beta_2}{\sin(180^\circ - \varepsilon)}. \qquad \text{(2 pont)}$$

A két egyenlőséget elosztva, rendezve, és felhasználva, hogy $\sin\varepsilon = \sin(180^\circ - \varepsilon)$, kapjuk, hogy

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Mivel $\dfrac{AB}{BC}$ racionális, ezért elég igazolni, hogy $\dfrac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}$ racionális. (1 pont)

Az ABC, ABD és BCD racionális oldalú háromszögekre felírva a koszinusztételt kapjuk, hogy $\cos\beta$, $\cos\beta_1$ és $\cos\beta_2$ is racionális. (1 pont)

Felhasználva, hogy $\cos\beta = \cos(\beta_1 + \beta_2) = \cos\beta_1 \cos\beta_2 - \sin\beta_1 \sin\beta_2$, innen adódik, hogy $\sin\beta_1 \sin\beta_2$ is racionális. (1 pont)

Továbbá $\sin^2\beta_2 = 1 - \cos^2\beta_2$ is racionális. (1 pont)

Ezért $\dfrac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = \dfrac{\sin\beta_1 \sin\beta_2}{\sin^2\beta_2}$ is racionális, és ezt kellett bizonyítani. (1 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

6. feladat Oldja meg az $x^3 + 2 = 5\sqrt[3]{5x-2}$ egyenletet a valós számok halmazán.

Bíró Béla (Sepsiszentgyörgy)

1. megoldás: Vezessük be az $y = \sqrt[3]{5x-2}$ segédismeretlent. Ekkor egyrészt $y^3 + 2 = 5x$, másrészt pedig a feladatban szereplő egyenlet az $x^3 + 2 = 5y$ alakot ölti, vagyis az alábbi egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{cases} x^3 + 2 = 5y, \\ y^3 + 2 = 5x. \end{cases} \qquad (3 \text{ pont})$$

Az iménti két egyenletet egymásból kivonva $x^3 - y^3 = 5(y - x)$ adódik, amit az $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ nevezetes azonosság segítségével alakíthatunk tovább:

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 + 5) = 0. \qquad (1 \text{ pont})$$

Itt a szorzat második tényezője nem lehet 0, hiszen

$$x^2 + xy + y^2 + 5 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 5 > 0,$$

ezért szükségképpen $x = y$. (1 pont)

Az eredeti egyenletnek tehát csak olyan x megoldásai lehetnek, amelyekre $x = \sqrt[3]{5x-2}$, azaz $x^3 - 5x + 2 = 0$, és mivel ebben az esetben $x^3 + 2 = 5x = 5\sqrt[3]{x-2}$, ezért pontosan az ilyen tulajdonságú x-ek a megoldásai. (Ezt a pontot akkor is megkapja a versenyző, ha a megoldás végén ellenőriz.) (1 pont)

Az $x^3 - 5x + 2 = 0$ egyenletnek az $x = 2$ gyöke. (1 pont)

Ennek ismeretében

$$0 = x^3 - 5x + 2 = (x - 2)(x^2 + 2x - 1),$$

ahonnan három valós gyököt kapunk: $2, -1 + \sqrt{2}$ és $-1 - \sqrt{2}$. (2 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: Az $x^3 - y^3 = 5(y - x)$ egyenletet átrendezhetjük $x^3 + 5x = y^3 + 5y$ alakba is, és ekkor a $g(x) = x^3 + 5x$ függvény bevezetésével arról van szó, hogy $g(x) = g(y)$. Mivel g két szigorúan monoton növő függvény összege, ezért maga is szigorúan monoton növő (ezt abból is láthatjuk, hogy $g'(x) = 3x^2 + 5 > 0$), így szükségképpen $x = y$.

A 6. feladat kitűzésénél a gyökjel alatt az x mellől lemaradt az 5-ös szorzó. Tehát a bizottság szándéka szerint az $x^3+2=5\sqrt[3]{5x-2}$ egyenlet megoldása lett volna a cél, a kötetben leírt megoldások is erre vonatkoznak. Sajnos, az így hibásan kitűzött feladat gyökeinek a megkeresésére nem is tudunk egzakt módszert. Ezt figyelembe véve a javítás az alábbi pontozást követte: Az egyenlet két oldalán szereplő függvények helyes grafikonja: 2–2 pont; ennek alapján csak egy gyök van: 2 pont; ez -3 és -2 közé esik: 3 pont (+1 pont)=10 pont. Másik lehetőség: Az $y=\sqrt[3]{x-2}$ segédismeretlen bevezetésével az $f(x)=x^3+2$ és f^{-1} függvények kapcsolatának felírása: 3 pont; csak egy gyök létezik 3 pont; ez -3 és -2 közé esik: 3 pont (+1 pont)=10 pont.

2. megoldás: Vezessük be az $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^3+2)/5$ függvényt. Az x^3 függvény szigorúan monoton növekedő, ezért f is az, tehát injektív. Az $y=(x^3+2)/5$ egyenletből x-et kifejezve nyerjük, hogy $f^{-1}(y)=\sqrt[3]{5y-2}$. (3 pont)

Ebből következően a feladat egyenlete $f(x)=f^{-1}(x)$ alakba írható, ami egyenértékű azzal, hogy $f(f(x))=x$. (1 pont)

Ennek pontosan azon x_0 számok a megoldásai, amelyekre $f(x_0)=x_0$. Ha ugyanis $f(x_0)< < x_0$ lenne, akkor f szigorú monoton növekedése folytán $f(f(x_0))=x_0<f(x_0)$, ami ellentmondás. Hasonlóan nem lehetséges $f(x_0)>x_0$ sem.

Az eredeti egyenletnek tehát pontosan olyan x megoldásai lehetnek, amelyekre $(x^3+2)/5= =x$. (2 pont)

Innen az előző részhez hasonlóan fejezhetjük be a megoldást. (3 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

Megjegyzés. Lényeges, hogy f szigorúan monoton *növekedő*, mert csökkenő esetben általában nem igaz, hogy az $f(x)=f^{-1}(x)$ egyenletnek csak olyan megoldásai lennének, amelyekre $f(x)=x$.