25. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Budapest, 2016. március 11-15.

11. osztály

1. feladat: Egy háromszög három oldalának mérőszáma, a, b, c ebben a sorrendben egy mértani sorozat három egymást követő tagja. Bizonyítsa be, hogy $a^2 + c^2 < 3ac$.

Minda Mihály (Vác)

2. feladat: Egy interneten lebonyolított bajnokságon minden résztvevő minden másik résztvevővel pontosan kétszer játszott. Egy mérkőzésen a győztes 2, a vesztes 0 pontot kapott, döntetlen esetén mindkét játékosnak 1-1 pont járt. Az eredménylista összeállítói meglepve tapasztalták, hogy az utolsó helyezett kivételével minden versenyző pontszáma úgy adódik, hogy a közvetlenül mögötte végző pontszámához mindig ugyanazt a páros számot hozzáadjuk. A győztes 2016 pontot szerzett. Hányan vettek részt a versenyen?

Tóth Sándor (Kisvárda)

3. feladat: Az ABC derékszögű háromszögben az A csúcsnál levő szög α. Az AB átfogóhoz tartozó magasság az átfogót a D pontban metszi. Az ADC háromszögbe olyan $DEFG$ négyzetet rajzolunk, amelynek E, F és G csúcsai rendre DC-re, CA-ra és AD-re illeszkednek, a CDB háromszögbe pedig olyan $DHIJ$ négyzetet, amelynek H, I és J csúcsai DB-re, BC-re és CD-re esnek. Jelölje t_1 és t_2 a $DEFG$, illetve a $DHIJ$ négyzet területét. Bizonyítsa be, hogy

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{t_1}{t_1 + t_2}}.$$

Bíró Bálint (Eger)

4. feladat: Az a_n sorozatban $a_1 = 1$ és $a_n = n\left(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}\right)$, ha $n \geq 2$. Határozza meg a_{2016} értékét.

Nagy Piroska Mária (Dunakeszi)

Szoldatics József (Budapest)

5. feladat: Jelölje p_n az n-edik prímszámot ($p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots$). Bizonyítsa be, hogy minden n pozitív egész szám esetén

$$\frac{1}{p_1 p_2} + \frac{1}{p_2 p_3} + \ldots + \frac{1}{p_n p_{n+1}} < \frac{1}{3}.$$

Bencze Mihály (Bukarest)

6. feladat: Az $ABCD$ paralelogramma A csúcsán áthaladó kör az AB, AD oldalakat és az AC átlót rendre az M, N, illetve K pontokban metszi. Bizonyítsa be, hogy

$$AB \cdot AM + AD \cdot AN = AC \cdot AK.$$

Róka Sándor (Nyíregyháza)