24. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Szabadka, 2015. április 8-12.

12. osztály

1. feladat: A szabályos hatoldalú csonka gúla alapélei a és b ($a > b$). A csonka gúla oldalfelülete megegyezik az alaplapok területének összegével. Határozd meg a csonka gúla magasságát!

Angyal Andor (Szabadka, Vajdaság)

Megoldás: Mivel a csonkagúla oldalfelülete megegyezik az alaplapok területének összegével, ezért

$$6 \cdot \frac{(a+b)h}{2} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$$

ahol h a csonkagúla oldalmagassága. Rendezés után azt kapjuk, hogy

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{a+b}.$$

Ha H-val jelöljük a csonkagúla testmagasságát, akkor a Pitagorasz-tétel alkalmazásával a

$$h^2 = H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

egyenlőséghez jutunk, ahonnan a következő módon kapjuk meg a keresett magasságot:

$$H^2 = h^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\frac{(a^2+b^2)^2}{(a+b)^2} - \frac{3}{4}(a-b)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}.$$

Gyökvonás után adódik, hogy $H = \dfrac{ab\sqrt{3}}{a+b}$.

---

2. feladat: Egy 9×9-es négyzetrácsba beírtuk a számokat 1-től 81-ig. Bizonyítsd be, hogy a számok bármely elrendeződése mellett van két olyan szomszédos négyzet, amelyben a számok közötti különbség legalább 6. (Szomszédosnak tekintjük azokat a négyzeteket, amelyeknek közös oldaluk van.)

Béres Zoltán (Szabadka, Vajdaság)

Megoldás: Tekintsük azt a két négyzetet, amelybe az 1-es és a 81-es van beírva, és keressük a legrövidebb utat a szomszédos négyzeteken keresztül a két szám között. Figyeljük meg, hogy ezen az úton, hány „lépéssel" tudunk végigmenni.

1. eset. Az 1-es és a 81-es a két átellenes sarokban van. Ekkor a legrövidebb út a két négyzet között 16 lépésből áll (8 jobbra és 8 balra), és létezik két ilyen út is, amelyeknek nincs közös négyzetük.

Ha feltesszük, hogy nincs 5-nél nagyobb különbség a szomszédos mezők között, akkor az út négyzeteibe írt egyetlen lehetséges számsor az 1, 6, 11, 16, 21,. . . , 71, 76, 81, ahol a szomszédos számok közötti különbség mindig 5. Ekkor a másik út, mely ezeket a számokat nem tartalmazhatja, szükségképpen tartalmaz egy 5-ösnél nagyobb lépést, mivel a második szám csak 6-nál kisebb lehet, és a további lehető legnagyobb, 5-ös lépésekkel sem érheti el a 81-et.

2. eset. Az 1-es és a 81-es nem a két átellenes sarokban van. Ekkor a legrövidebb út a két négyzet között rövidebb, mint 16 lépés. Ha feltesszük, hogy nincs 5-nél nagyobb különbség a szomszédos mezők között, akkor legfeljebb 15 lépésből az elérhető legnagyobb szám a 76, így nem érhetjük el a 81-et.

---

3. feladat: Ha α hegyesszög, akkor bizonyítsd be, hogy teljesül az

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\geq 3+2\sqrt{2}$$

egyenlőtlenség!

Csikós Pajor Gizella (Szabadka, Vajdaság)

Megoldás: Végezzük el a következő átalakításokat, alkalmazva a számtani és mértani közepek közötti összefüggést, valamint azt, hogy $|\sin x|\leq 1$:

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)=1+\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}\right)+\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\geq$$

$$\geq 1+\frac{2}{\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha}}+\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\left(1+\frac{1}{\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha}}\right)^2=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sin\alpha\cos\alpha}}\right)^2=$$

$$=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2\alpha}}\right)^2\geq(1+\sqrt{2})^2=1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}.$$

---

4. feladat: Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$(2x+1)\sqrt{(2x-1)^3}+16x^4=2x(4x-1).$$

Olosz Ferenc (Szatmárnémeti, Erdély)

1. megoldás: Az egyenlet értelmezett, ha $x\in\left[\frac{1}{2};\infty\right)$. Az egyenletet balra rendezzük, majd 1 hozzáadásával és kivonásával a

$$(2x-1)+(2x+1)(2x-1)\sqrt{2x-1}+(16x^4-8x^2+1)=0,$$

illetve

$$\left(\sqrt{2x-1}\right)^2+(4x^2-1)\sqrt{2x-1}+(4x^2-1)^2=0$$

alakra hozzuk. A valós számok halmazán az $a^2\pm ab+b^2=0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a=b=0$. Esetünkben keressük a $\sqrt{2x-1}=0$ és $4x^2-1=0$ egyenletek közös megoldását és ez $x=\dfrac{1}{2}$.

2. megoldás: Az egyenlet értelmezett, ha $2x-1\geq 0$, vagyis $x\in\left[\frac{1}{2};\infty\right)$. Alkalmazzuk az egyenletre a következő ekvivalens átalakításokat:

$$\begin{aligned}(2x-1)+(2x+1)(2x-1)\sqrt{2x-1}+(16x^4-8x^2+1)&=0\\(2x-1)+(2x+1)(2x-1)\sqrt{2x-1}+(4x^2-1)^2&=0\\(2x-1)+(2x+1)(2x-1)\sqrt{2x-1}+(2x-1)^2(2x+1)^2&=0\\(2x-1)\left[1+(2x+1)\sqrt{2x-1}+(2x-1)(2x+1)^2\right]&=0.\end{aligned}$$

Minden $x \geq \frac{1}{2}$ esetén $1+(2x+1)\sqrt{2x-1}+(2x-1)(2x+1)^2 \geq 1$, tehát csak $2x-1$ lehetséges, azaz $x = \dfrac{1}{2}$.

---

5. feladat: Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$2x^2 + \sqrt{2} + \log_2^2\left(2x^2 + \sqrt{2}\right) = 2^{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}} + \frac{x^2+1}{(x^2+2)^2}$$

Bence Mihály (Brassó, Erdély)

Megoldás: Mivel nemnegatív értékekre az $f(x) = 2^x + x^2$ függvény szigorúan monoton növekvő, ezért nemnegatív értékekre injektív is. Felhasználva ezt a jelölést az adott egyenlet ekvivalens az

$$f\left(\log_2\left(2x^2+\sqrt{2}\right)\right) = f\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}\right)$$

egyenlettel, ahonnan az f függvény injektív tulajdonsága miatt következik, hogy

$$\log_2\left(2x^2+\sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}.$$

Mivel $\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)^2 \geq 0$, ahonnan következik

$$x^2+1-2\sqrt{x^2+1}+1 \geq 0,$$

valamint

$$x^2+2-2\sqrt{x^2+1} \geq 0,$$

illetve a

$$2\sqrt{x^2+1} \leq x^2+2$$

egyenlőtlenség, így érvényes, hogy

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2} \leq \frac{1}{2} \text{ és } \log_2\left(2x^2+\sqrt{2}\right) \geq \log_2\sqrt{2} = \frac{1}{2}.$$

Ebből adódik, hogy csak a $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2} = \dfrac{1}{2}$ egyenlőség lehetséges. Ekvivalens átalakításokkal megkapjuk, hogy

$$2\sqrt{x^2+1} = x^2+2,$$

ahonnan négyzetre emelve mindkét oldalt a

$$4(x^2+1) = (x^2+2)^2$$

egyenlet következik. Elvégezve a műveleteket, majd rendezve a kapott kifejezést adódik, hogy

$$4x^2+4 = x^4+4x^2+4,$$

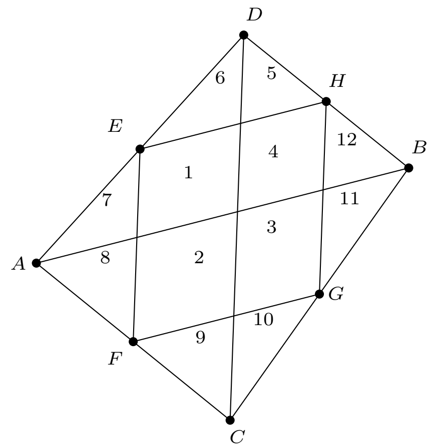
illetve $x^4 = 0$, amely egyenlet egyetlen megoldása $x = 0$.

---

6. feladat: Egy $\overline{AB} = 42$ cm és egy $\overline{CD} = 58$ cm hosszú szakasz α szög alatt metszi egymást az O pontban. Mekkora a szakaszok végpontjaival (mint csúcsokkal) alkotott $ACBD$ négyszög pontos területe, ha tudjuk, hogy $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{7}$?

Gecse Frigyes (Kisvárda, Magyarország)

Megoldás: Legyenek E, F, G, H az $ABCD$ négyszög oldalainak felezőpontjai. A megszámozott alakzatok területét jelöljük t-vel, megfelelő indexszel ellátva.



A keresett t_{ABCD} területre fennáll a $t_{ABCD} = t_1 + t_2 + \ldots + t_{11} + t_{12}$ egyenlőség. Az $EFGH$ négyszög paralelogramma, mert egy-egy oldalpárja párhuzamos egy megfelelő adott szakasszal. Mint háromszögek középvonalai

$$\overline{EH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 21 \text{ cm}, \overline{HG} = \frac{1}{2}\overline{CD} = 29 \text{ cm}.$$

Tudjuk (ha nem a paralelogrammára, akkor a háromszögre vonatkozóan), hogy

$$t_{EFGH} = \overline{EH} \cdot \overline{HG} \cdot \sin\alpha = 21 \cdot 29 \cdot \sin\alpha.$$

A háromszögek középvonalainak és a paralelogramma átlóinak tulajdonságait felhasználva adódik, hogy $t_1 = t_6 + t_7$, $t_2 = t_8 + t_9$, $t_3 = t_{10} + t_{11}$, $t_4 = t_5 + t_{12}$. Innen

$$t_{EFGH} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = t_5 + t_6 + \ldots + t_{12} = 21 \cdot 29 \cdot \sin\alpha.$$

Ennélfogva

$$t_{ABCD} = 2(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) = 2 \cdot 21 \cdot 29 \cdot \sin\alpha.$$

Az ismert

$$\sin\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

képlet alapján (ha nem ismerjük, vezessük le) adódik, hogy

$$\sin\alpha = \frac{2 \cdot \frac{3}{7}}{1 + \frac{9}{49}} = \frac{21}{29}.$$

Végül $t_{ABCD} = 2 \cdot 21 \cdot 29 \cdot \frac{21}{29} = 2 \cdot 21^2 = 882 \text{ cm}^2$.