24. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Szabadka, 2015. április 8-12.

11. osztály

1. feladat: Legyen $P(x)$ egész együtthatós polinom. Tudjuk, hogy a $P(x)$ polinom helyettesítési értéke 2015 különböző egész értékre 2014-et ad eredményül. Bizonyítsd be, hogy nincs olyan x_0 egész szám, amelyre $P(x_0) = 2016$ teljesül!

Kántor Sándor (Debrecen, Magyarország)

Megoldás: A $P(x) - 2014$ polinom gyöktényezős alakja

$$P(x) - 2014 = g(x)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{2015}),$$

ahol x_i $(i = 1, 2, \dots, 2015)$ különböző egész számok, és $g(x)$ egész együtthatós polinom. Ha egy egész x_0-ra $P(x_0) = 2016$, akkor

$$P(x_0) - 2014 = 2 = g(x_0)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\dots(x_0 - x_{2015})$$

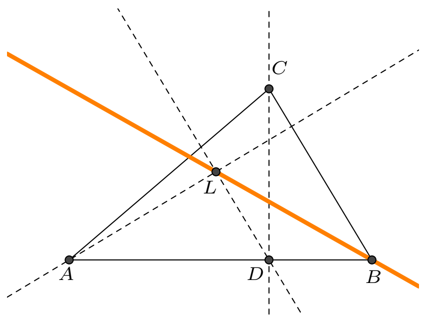
ellentmondás, mert 2 nem írható fel ennyi különböző egész szám szorzataként (legfeljebb $g(x_0)$ egyezhet valamelyik $(x_0 - x_i)$-vel).

---

2. feladat: A hegyesszögű ABC háromszögben legyen D pont a C csúcsból húzott magasság talppontja úgy, hogy $AD = BC$ érvényes. Ha L pont a D pontból húzott merőleges talppontja az A csúcsból szerkesztett magasságra, akkor igazold, hogy a BL az $ABC\sphericalangle$ szögfelezője!

Ripcó Sipos Elvira (Zenta, Vajdaság)

Megoldás: Mivel $DAL\sphericalangle = 90^\circ - ABC\sphericalangle = BCD\sphericalangle$ és $AD = CB$, a két derékszögű háromszög, ALD_Δ és BCD_Δ, a *szög-oldal-szög* egybevágósági tétel alapján egybevágó, és ezért befogóik is egybevágóak, azaz $LD = BD$. Az LBD_Δ tehát egyenlő szárú és $DLB\sphericalangle = DBL\sphericalangle$.



Ezek alapján

$$180^\circ = LAB\sphericalangle + ABL\sphericalangle + BLA\sphericalangle = 90^\circ - ABC\sphericalangle + ABL\sphericalangle + 90^\circ + ABL\sphericalangle,$$

amiből következik, hogy $2 \cdot ABL\sphericalangle = ABC\sphericalangle$, amit bizonyítani kellett.

---

3. feladat: A Mesebeli Órán a beosztások nem 1-től 12-ig, hanem 1-től 2015-ig vannak jelölve. A Furfangos Manók azt a játékot játszák, hogy eltüntetik az Óráról az 1-es számot, a 16-ost, 31-est, majd így sorban minden 15-ik beosztáshoz tartozó számot. Amikor olyan helyre érkeznek, amelyikről már eltüntették a számot, oda visszavarázsolják az eredeti számot, ami ott állt. Melyik lesz az első olyan szám, amelyet visszavarázsolnak a Furfangos Manók, hány kört kell addig megtenniük és hány szám látható abban a pillanatban a Mesebeli Óra beosztásainál?

Péics Hajnalka (Szabadka, Vajdaság)

Megoldás: Mivel $2015 = 134 \cdot 15 + 5$, így az első körben eltüntetik az 1, 16, 31, ..., $2011 = 134 \cdot 15 + 1$ számokat. Mivel az utolsó szám a 2011 és mivel $2011 + 15 = 2015 + 11$, így a második körben a 11, 26, 41, ..., $2006 = 133 \cdot 15 + 11$ számokat. Az utolsó szám a 2006. Mivel $2006 + 15 = 2015 + 6$, így a harmadik körben a 6, 21, 36, ..., $2001 = 133 \cdot 15 + 6$ számokat tüntetik el a Furfangos Manók. Mivel az utolsó számjegy a 2001 és $2001 + 15 = 2015 + 1$, így a negyedik körben érkeznek el először egy olyan helyre, amelyen nincsen számjegy, az 1-es helyére, s ezt visszavarázsolják.

Azokhoz a beosztásokhoz tartozó számok, amelyeket a Manók az első körben eltüntettek, $15k + 1 = 5 \cdot 3k + 1$ alakúak, amelyeket a második körben tüntettek el, $15k + 11 = 5(3k + 2) + 1$ alakúak, azok pedig amelyeket a harmadik körben tüntettek el $15k + 6 = 5(3k + 1) + 1$ alakúak. Mivel az első három körben a 15 különböző maradékosztályaiba tartoznak az eltüntetett számok, ezért az 1-esnél hamarabb nem tudnak olyan beosztásra ugrani a Manók, ahol már nincs szám.

Minden eltüntetett szám tehát $5k + 1$ alakú, ahol $k \in \{0, 1, \ldots, 402\}$, vagyis 5-tel osztva 1-et adnak maradékul. Meg kell nézni hány ilyen szám van 2015-ig. Az első ilyen szám az 1-es, a legnagyobb pedig a 2011, tehát összesen 403 van belőlük. Így miután az 1-es számot a Manók visszavarázsolták, maradt még $2015 - 402 = 1613$ szám, amelyek láthatóak a Mesebeli Óra beosztásainál.

Válasz: Az 1-es számot varázsolják vissza először, addig három teljes kört kell megtenniük és 1613 szám látható abban a pillanatban a Mesebeli Óra beosztásainál.

---

4. feladat: Hány megoldása van az $x = 2015 \sin x$ egyenletnek?

Megoldás: Az egyenlet rendezve $\frac{x}{2015} = \sin x$. A mi feladatunk az, hogy meghatározzuk az $f(x) = \frac{x}{2015}$ és a $g(x) = \sin x$ függvények közös pontjainak számát, amelyek a $[-2015; 2015]$ zárt intervallumban vannak, mivel $-1 \leq f(x) \leq 1$. A $[0; 2015]$ zárt intervallumon a $\sin x$ periódusa $\frac{2015}{2\pi} \approx 320{,}86$-szor „szalad át” és minden periódusban az $f(x)$ függvény a $g(x)$-et kétszer metszi.

$x > 0$ esetben $321 \cdot 2$ közös pont van, $x < 0$ esetében szintén. Mivel $x = 0$-hoz tartozó közös pontot kétszer számoltuk, ezért az egyenlet megoldásainak száma $2 \cdot 642 - 1 = 1283$.

Mikó István (Felvidék)

5. feladat: Legyen K_n az $1, 2, \ldots, n$ számok ($n \in \mathbb{Z}^+$) legkisebb közös többszöröse, pl. $K_1 = 1$, $K_2 = 2$, $K_3 = 6$, $K_4 = 12$, $K_5 = 60$, $K_6 = 60$, és így tovább. Mely pozitív egész számokra teljesül, hogy $K_{n-1} = K_n$? Fogalmazd meg a sejtést és bizonyítsd be az állítást!

Kántor Sándorné (Debrecen, Magyarország)

Megoldás: Számoljuk ki néhány további legkisebb közös többszörös értékét.

$K_7 = 420$, $K_8 = 840$, $K_9 = 2520$, $K_{10} = 2520$, vagyis $K_9 = K_{10}$, mivel $1, 2, 3, \ldots, 9$ pozitív egészek prímtényezői között szerepel 10 összes prímtényezője.

Sejtés: $K_{n-1} = K_n$ akkor és csak akkor teljesül, ha n se nem prímszám, se nem prímhatvány.

A sejtés bizonyítása a következőképpen alakul.

Legyen n nem prímszámhatvány. Ekkor n különböző prímszámok szorzataként írható fel: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$. Mivel $r > 1$ és $p_i^{\alpha_1}$ mindegyike kisebb n-nél, ezért K_{n-1} osztója lesz, és n a K_{n-1} osztója , tehát $K_{n-1} = K_n$.

Legyen $K_{n-1} = K_n$. Azt kell megmutatni, hogy n nem prímszám hatványa. A bizonyítást indirekt úton végezzük el.

Tegyük fel, hogy n prímszámhatvány, vagyis $n = p^\alpha$ alakú. Ekkor p^α nem lehet osztója egyetlen pozitív egész számnak sem $1, 2, \ldots, (n-1)$-ig. Mivel $K_{n-1} = K_n$, ezért p^α a p azon legnagyobb hatványa, amely az $1, 2, \ldots, n-1$ egészek valamelyikének osztója, ami ellentmondás. Tehát n nem prímszám hatványa, s ezzel a sejtést bebizonyítottuk.

---

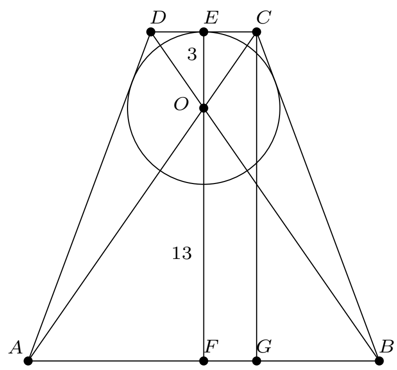
6. feladat: Egy 3 cm sugarú kör érinti egy 16 cm magasságú húrtrapéz mindkét szárát és a rövidebb alapját. A trapéz átlói illeszkednek a kör középpontjára. Mekkora a trapéz területe?

Katz Sándor (Bonyhád, Magyarország)

Megoldás: Legyenek a trapéz csúcsai A, B, C, D. Legyen a kör középpontja és egyben az átlók metszéspontja O, a DC alappal való érintési pont pedig E. A szimmetria miatt az E pont a DC alap felezőpontja. Legyen F az AB oldal felezőpontja. Ekkor adódik, hogy az EF szakasz a trapéz magassága. Mivel az O pont illeszkedik az EF-re a szimmetria miatt, így $OF = 16 - EO = 13$.

Az OEC és OFB háromszögek hasonlóak, mert mindkét háromszög derékszögű, valamint $FBO\sphericalangle = OCE\sphericalangle$, a hasonlóság aránya pedig $3 : 13$. Húzzuk meg a C pontból induló magasságot is, ennek talppontja legyen G. Legyen $EC = 3x$. Ekkor a hasonlóság miatt $FB = 13x$, és mivel $FG = EC = 3x$, így $GB = FB - FG = 10x$.

Mivel CD és CB is érinti a kört, ezért OC a BCD szög felezője. A szögfelezőtétel szerint $\dfrac{CB}{CD} = \dfrac{BO}{OD} = \dfrac{13}{3}$, így $CB = \dfrac{13}{3} DC = 26x$.



Ez az állítás belátható abból is, hogy az $ABC_\triangle$ egyenlő szárú, ahonnan $BC = AB = 2 \cdot 13x = 26x$.

A BGC háromszögre Pitagorasz tétele alapján felírható, hogy $16^2 + (10x)^2 = (26x)^2$, ahonnan $x = \dfrac{2}{3}$ következik, és így a terület:

$$t = \frac{(AB + DC) \cdot 16}{2} = \frac{(26x + 6x) \cdot 16}{2} = \frac{512}{3}\ \text{cm}^2.$$