24. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Szabadka, 2015. április 8-12.

10. osztály

1. feladat: A XXIV. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny tiszteletére Frici rajzolt Szabadka főterére egy 24 oldalú szabályos sokszöget. Hány olyan egyenlő szárú háromszöget rajzolhatna, amelynek minden csúcsa ennek a sokszögnek egy csúcsa, és minden oldala ennek a sokszögnek egy átlója?

Erdős Gábor (Nagykanizsa, Magyarország)

Megoldás: Rögzítsük az egyik csúcsot, legyen ez a szárak metszéspontja. Számozzuk meg a csúcsokat úgy, hogy ez legyen az 1-es, a számozás pedig az óramutató járásának megfelelő irányban folyamatos. A szomszédos csúcsok nem lehetnek a háromszög alapjai, mert akkor a háromszög 2 oldala nem átló lesz, hanem oldal. De minden, az 1-es csúcsból induló átlóra merőleges átló igen. Ilyenek: 3-ból a 23-ba, 4-ből a 22-be, 5-ből a 21-be, $\ldots$, 12-ből a 14-be. Ilyen átlóból 10 darab van. Ugyanez elmondható minden csúcsra, így kapunk $24 \cdot 10 = 240$ háromszöget. Mit számoltunk többször? A szabályos háromszögeket, azokat mindhárom csúcsuknál megszámoltuk. Mivel ilyen háromszögből 8 darab van (pl. az előbbi számozás szerint az 1, 9, 17 csúcsok által alkotott háromszög, illetve ennek elforgatottjai), így ezeket háromszor számoltuk, tehát kétszer ki kell vonni őket. A megfelelő háromszögek száma tehát $240-2\cdot 8 = 224$.

---

2. feladat: Ha $x, y, z \in [-3, 5]$, akkor igazold, hogy

$$\sqrt{5x-3y-xy+15}+\sqrt{5y-3z-yz+15}+\sqrt{5z-3x-xz+15} \leq 12.$$

Mikor állhat fenn az egyenlőség?

Kovács Béla (Szatmárnémeti, Erdély)

Megoldás: A gyökjelek alatti kifejezések szorzattá alakíthatók:

$$\sqrt{(x+3)(5-y)}+\sqrt{(y+3)(5-z)}+\sqrt{(z+3)(5-x)} \leq 12.$$

A feladat feltétele miatt az x, y, z valós számokra teljesül, hogy $x+3 \geq 0$, $5-x \geq 0$, $y+3 \geq 0$, $5-y \geq 0$, $z+3 \geq 0$ és $5-z \geq 0$, tehát a gyökös kifejezések értelmezettek.

Alkalmazzuk mindegyik gyökös kifejezésre a számtani és mértani középarányosok közötti összefüggést. Ekkor

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+3)(5-y)} &\leq \frac{x+3+5-y}{2},\\ \sqrt{(y+3)(5-z)} &\leq \frac{y+3+5-z}{2},\\ \sqrt{(z+3)(5-x)} &\leq \frac{z+3+5-x}{2}.\end{aligned}$$

Összeadva a fenti egyenlőtlenségeket megkapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget, azaz

$$\begin{aligned}&\sqrt{(x+3)(5-y)}+\sqrt{(y+3)(5-z)}+\sqrt{(z+3)(5-x)} \leq\\ &\leq \frac{x+3+5-y}{2}+\frac{y+3+5-z}{2}+\frac{z+3+5-x}{2}=\frac{24}{2}=12.\end{aligned}$$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha a zárójeleken belül levő kifejezések megegyeznek, azaz ha $x+3=5-y$, $y+3=5-z$ és $z+3=5-x$, ez pedig az $x=y=z=1$ eset.

---

3. feladat: Hány olyan egyenlőszárú trapéz létezik, amelynek a kerülete 2015 és az oldalak mérőszáma egész szám?

Szabó Magda (Szabadka, Vajdaság)

1. megoldás: Legyenek az oldalak rendre a, c, b, c, ahol $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ és legyen $a > b$. Ekkor érvényes az $a < c + b + c$ egyenlőtlenség és a feladat feltétele alapján

$$a < \frac{a+b+2c}{2} = \frac{2015}{2}.$$

Az a valamely rögzített értékére az $\{1, 2, 3, \ldots, 1007\}$ halmazból a b értéke bármely a-nál kisebb érték lehet, de paritásban különbözőek kell hogy legyenek. Ennek alapján a lehetőségek száma $\left[\frac{a}{2}\right]$, ekkor a c értéke egyértelmű és a trapéz is egyértelműen meghatározott az oldalaival. A trapézok keresett száma:

$$\sum_{a=1}^{1007} \left[\frac{a}{2}\right] = 0+1+1+2+2+\ldots+502+502+503+503 = 2\cdot\frac{504\cdot 503}{2} = 253512.$$

2. megoldás: Jelölje a a trapéz rövidebb alapját, c a szárakat, a hosszabb alap pedig az ábra alapján legyen

$$b+a+b = a+2b.$$

Ekkor $2a+2b+2c = 2015$, ahonnan

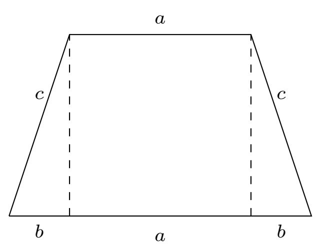
$$a+b+c = 1007{,}5.$$

Mivel $b < c$ és $a, c \in \mathbb{Z}^+$, vehetjük, hogy

$$b = d - 0{,}5, \text{ ahol } d \in \mathbb{Z}^+.$$

Most teljesül, hogy $a+c+d = 1008$ és $a \geq 1$, ahonnan $c+d \leq 1007$. A feladat feltételeivel ekkor ekvivalens az, hogy $d \leq c$, $c, d \in \mathbb{Z}^+$ és $c+d \leq 1007$. Mivel $2d \leq c+d \leq 1007$, így $d \leq 503$. Ha $d \in \{1, 2, 3, \ldots, 503\}$, akkor $c \in \{d, d+1, \ldots, 1007-d\}$. A trapézok keresett száma tehát

$$\sum_{d=1}^{503}(1007-d-d+1) = \sum_{d=1}^{503}(1008-2d) = 503\cdot 1008 - 2\cdot\frac{503\cdot 504}{2} = 503\cdot 504 = 253512.$$



---

4. feladat: Határozd meg mindazokat az a valós számokat, melyekre az

$$ax^2 + (1 - a^2)x - a > 0$$

egyenlőtlenség egyetlen x megoldására sem igaz, hogy $|x| > 2$.

Csikós Pajor Gizella (Szabadka, Vajdaság)

Megoldás: Ha egyetlen x megoldásra sem igaz, hogy $|x| > 2$, akkor minden x megoldásra igaz, hogy $|x| \leq 2$ vagyis, hogy $-2 \leq x \leq 2$. Az $ax^2 + (1 - a^2)x - a = 0$ egyenlet $a \neq 0$ esetén másodfokú, és gyökei az $x_{1/2} = \dfrac{-1 + a^2 \pm (1 + a^2)}{2a}$ számok, ahonnan $x_1 = -\dfrac{1}{a}$ és $x_2 = a$.

1. Ha $a = 0$, akkor az $x > 0$ egyenlőtlenséget kapjuk, amely halmazban van olyan x amelyre $|x| > 2$, így $a \neq 0$.
2. Ha $a > 0$, akkor a megfelelő parabolának minimuma van (felfelé nyíló) és akkor pozitív, amikor $x < -\dfrac{1}{a}$ vagy $x > a$. Mivel bármely $a > 0$ esetén található olyan x a megoldáshalmazból, amelyre $|x| > 2$, így $a > 0$ sem lehetséges.
3. Ha $a < 0$, akkor a megfelelő parabolának maximuma van (lefelé nyíló) és akkor pozitív, amikor $a < x < -\dfrac{1}{a}$. Ha az $a < x < -\dfrac{1}{a}$ feltétel mellett $-2 \leq x \leq 2$ is érvényes, akkor $a \geq -2$ és $-\dfrac{1}{a} \leq 2$, illetve $a \leq -\dfrac{1}{2}$ kell, hogy teljesüljön.

Ezek szerint a keresett a számokra a $-2 \leq a \leq -\dfrac{1}{2}$ feltétel kell hogy teljesüljön.

---

5. feladat: Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\left|2x - 57 - 2 \cdot \sqrt{x - 55} + \frac{1}{x - 54 - 2 \cdot \sqrt{x - 55}}\right| = |1 - x|.$$

Bíró Bálint (Eger, Magyarország)

Megoldás: A négyzetgyökös kifejezés akkor értelmezett, ha $x \geq 55$. Először az egyenletet a következő alakra hozzuk:

$$\left|x - 55 - 2 \cdot \sqrt{x - 55} + \frac{1}{x - 54 - 2 \cdot \sqrt{x - 55}} + x - 3\right| = |1 - x|.$$

Vezessük be az $x - 54 - 2 \cdot \sqrt{x - 55} = a$ helyettesítést. Az egyenletben szereplő tört nevezője miatt nyilvánvaló, hogy $a \neq 0$. Könnyen belátható, hogy

$$a = \left(1 - \sqrt{x - 55}\right)^2,$$

ez pedig azt jelenti, hogy csak $a > 0$ állhat fenn. Ezzel a jelöléssel az eredeti egyenlet:

$$\left|a + \frac{1}{a} + x - 3\right| = |1 - x|$$

alakba írható, amelyből két lehetséges esetet írhatunk fel:

(A) $$a + \frac{1}{a} + x - 3 = 1 - x,$$

vagy

$$\text{(B)} \qquad a + \frac{1}{a} + x - 3 = x - 1.$$

Az (A) egyenletből $a + \dfrac{1}{a} = 4 - 2x$ következik, ez azonban az $x \geq 55$ és az $a > 0$ feltételek mellett nem teljesülhet, hiszen az egyenlet két oldalának előjele eltérő. Ezért az (A) egyenletnek nincs megoldása.

A (B) egyenletből azt kapjuk, hogy $a + \dfrac{1}{a} = 2$. Ismeretes a pozitív számokra vonatkozó $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$ nevezetes egyenlőtlenség, amelyben az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = 1$.

Az $a = \left(1 - \sqrt{x - 55}\right)^2$ összefüggés szerint tehát: $\left(1 - \sqrt{x - 55}\right)^2 = 1$. Ez az egyenlőség ismét kétféleképpen lehetséges:

$$\text{(C)} \qquad 1 - \sqrt{x - 55} = 1,$$

vagy

$$\text{(D)} \qquad 1 - \sqrt{x - 55} = -1.$$

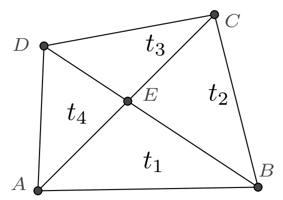
A (C) egyenlet megoldása $x = 55$, a (D) egyenlet megoldása pedig $x = 59$. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy ezek a számok valóban kielégítik az eredeti egyenletet, ezért a feladat megoldáshalmaza $M = \{55, 59\}$.

---

6. feladat: Egy konvex négyszöget átlói négy háromszögre bontanak. Ha mind a négy háromszög területének a mértéke egész szám, akkor végződhet-e 2015-re a négy terület mértékének szorzata? Lehet-e ez a szorzat olyan egész szám, amelynek utolsó négy jegye 2015, azaz lehet-e $t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 = \overline{\ldots 2015}$, ha t_1, t_2, t_3, t_4 jelöli a háromszögek területeinek mértékét?

Katz Sándor (Bonyhád, Magyarország)

Megoldás: Legyenek a négyszög csúcsai A, B, C, D, az átlók metszéspontja pedig E. Az átlók behúzásával keletkezett négy háromszög területe legyen t_1, t_2, t_3 és t_4. Az ABE és AED háromszögek magassága ugyanaz, ezért területeik aránya $t_1 : t_4 = BE : ED$. Ugyanígy a CBE és CED háromszögekre megkapható, hogy $t_2 : t_3 = BE : ED$. A két egyenlőségből $t_1 \cdot t_3 = t_2 \cdot t_4$ adódik. (*Ezzel beláttuk, hogy egy konvex négyszög átlói által meghatározott négy háromszög területe közül két-két szemközti szorzata egyenlő.*) Eszerint a négy háromszög területének szorzata: $t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 = (t_1 \cdot t_3)^2$.



Mivel t_1, t_2, t_3, t_4 egész számok, így szorzatuk az előzőek szerint négyzetszám. Viszont ha egy négyzetszám 5-re végződik, akkor utolsó előtti jegye 2, hiszen

$$(10k + 5)^2 = 100k^2 + 100k + 25,$$

az első két tag összege két 0-ra, az egész összeg 25-re végződik. A négy terület mértékének szorzata tehát nem végződhet 2015-re.