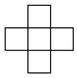
24. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Szabadka, 2015. április 8-12.

9. osztály

1. feladat: Egy 20×20-as négyzetháló négyzeteibe a bal felső mezőből indulva soronként sorra beírjuk az $1, 2, 3, \ldots, 400$ pozitív egész számokat. Ezután a táblázat négyzeteiből az ábrán látható kereszt alakú síkidommal mindig ötöt letakarunk az összes lehetséges módon.



Hányszor lesz a letakart öt szám összege négyzetszám? Milyen szám áll ezekben az esetekben a kereszt közepén?

Nemecskó István (Budapest, Magyarország)

Megoldás: Ha a kereszt középső mezőjében k áll, akkor az öt mező összege $5k$. Ha ez négyzetszám, akkor $5 \mid k$ teljesül. A középső mező viszont nem lehet a tábla szélén, ezért: $20 < k < 380$, valamint $k \neq 20i$, ha $i = 1, 2, \ldots, 20$, és $k \neq 20j + 1$, ha $j = 0, 1, \ldots, 19$. Mivel $5k$ négyzetszám, így $k = 5 \cdot l^2$ alakú, ahol l természetes szám. Az előző feltételek miatt adódik, hogy $4 < l^2 < 76$, ebből pedig $2 < l < 9$.

$l = 3$ esetén $k = 5 \cdot 3^2 = 45$, ami teljesíti a feltételt.

$l = 4$ esetén $k = 5 \cdot 4^2 = 80$, ami nem teljesíti a feltételt.

$l = 5$ esetén $k = 5 \cdot 5^2 = 125$, ami teljesíti a feltételt.

$l = 6$ esetén $k = 5 \cdot 6^2 = 180$, ami nem teljesíti a feltételt.

$l = 7$ esetén $k = 5 \cdot 7^2 = 245$, ami teljesíti a feltételt.

$l = 8$ esetén $k = 5 \cdot 8^2 = 320$, ami nem teljesíti a feltételt.

A megfelelő értékek tehát $l = 3$, $l = 5$ és $l = 7$, s így a letakart keresztek középső mezői, rendre, 45, 125 és 245 lehetnek.

---

2. feladat: Egy háromjegyű számot osztva a számjegyeinek összegével 37-et kapunk. Ha e háromjegyű számhoz hozzáadunk 297-et, a megfordított (felcserélt sorrendben felírt) számjegyekből álló számot kapjuk. Mely háromjegyű számok esetében lehetséges ez?

Kovács Béla (Szatmárnémeti, Erdély)

Megoldás: Legyen a háromjegyű szám $100a + 10b + c$. Az első feltétel alapján adódik $100a + 10b + c = 37(a + b + c)$, innen pedig $63a = 27b + 36c$. Elosztva 9-cel a kapott egyenletet, kapjuk a $7a = 3b + 4c$ összefüggést. A második feltétel alapján adódik a $100a + 10b + c + 297 = 100c + 10b + a$ egyenlet, innen pedig $99a + 297 = 99c$, amely 99-cel osztva adja az $a + 3 = c$ összefüggést. Az első egyenlőségbe helyettesítve kapjuk, hogy $7a = 3b + 4(a + 3)$, ahonnan $3a = 3b + 12$, amely 3-mal osztva adja az $a = b + 4$ egyenlőséget. Tehát: $a = b + 4$ és $c = b + 7$. Mivel a, b, c számjegyek, ezért b lehetséges értékei: 0, 1 vagy 2.

Ha $b = 0$, akkor $a = 4$ és $c = 7$, a keresett háromjegyű szám pedig a 407.

Ha $b = 1$, akkor $a = 5$ és $c = 8$, a keresett háromjegyű szám pedig az 518.

Ha $b = 2$, akkor $a = 6$ és $c = 9$, a keresett háromjegyű szám pedig a 629.

A keresett háromjegyű számok tehát: 407, 518 és 629. $407 : 11 = 37$ és $704 - 407 = 297$, $518 : 14 = 37$ és $815 - 518 = 297$, $629 : 17 = 37$ és $926 - 629 = 297$.

---

3. feladat: Hány megoldása van a prímszámok halmazában a $p^2+q^2+r^2+s^2=pqrs+4$ egyenletnek?

Mészáros József (Galánta, Felvidék)

Megoldás: Mind a négy prímszám nem lehet páratlan. Tegyük fel, hogy $s=2$. Ekkor

$$p^2+q^2+r^2=2pqr.$$

A megmaradt prímszámok sem lehetnek mind páratlanok, mert akkor a bal oldal páratlan volna a jobb oldal pedig páros. Legyen $r=2$. Ekkor

$$p^2+q^2+4=4pq, \text{ illetve } p^2+q^2=4(pq-1).$$

A bal oldali kifejezés miatt p és q paritása megegyező kell, hogy legyen. Ha mindkettő páratlan volna, akkor $p^2=4k+1$ és $q^2=4l+1$ alakú, ahol k és l valamilyen pozitív egész számok. Ekkor viszont a $p^2+q^2=4(pq-1)$ egyenlet bal oldala $4m+2$ alakú, ahol m pozitív egész szám, a jobb oldala pedig 4 többszöröse. Következésképpen csak a $p=q=2$ eset lehetséges. Ekkor viszont $4+4=4\cdot 3$, ami ellentmondás, tehát az adott egyenletnek nincs a feladat feltételeit kielégítő megoldása.

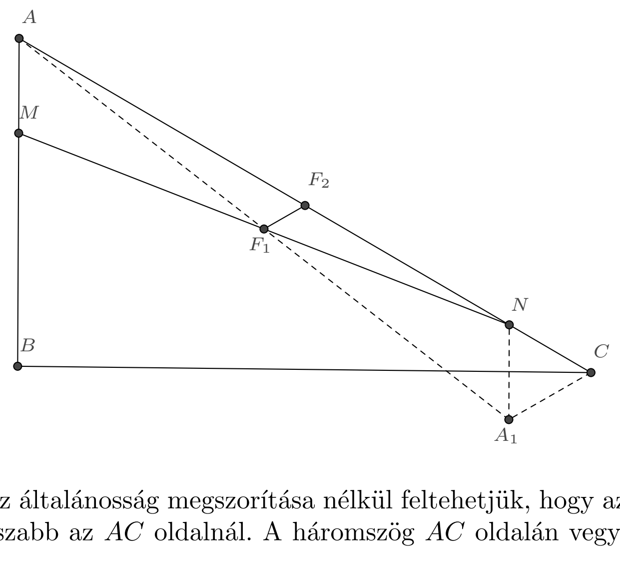
---

4. feladat: Egy ABC háromszögben $A\sphericalangle=60°$. Legyenek rendre az M és N pontok az AB és AC oldalak olyan pontjai, melyekre $AM=CN$. Az MN szakasz felezőpontja legyen F_1, míg az AC oldal felezőpontja F_2. Bizonyítsd be, hogy

$$F_1F_2=\frac{1}{2}\cdot AM.$$

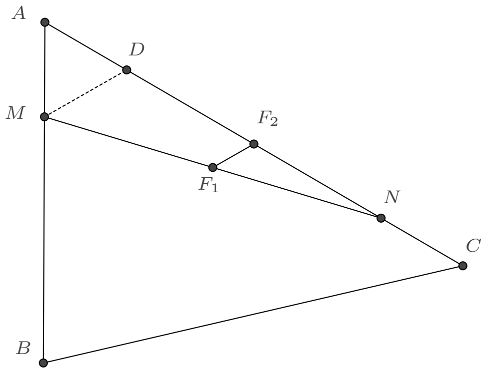
Bíró Béla (Sepsiszentgyörgy, Erdély)

1. megoldás: Tekintsük az A csúcsnak az F_1 pontra vonatkozó A_1 szimmetrikus képét. (lásd az ábrát) A feltevést is figyelembe véve, az AMA_1N négyszög paralelogramma. Így $AM=A_1N$ és $AM\parallel A_1N$. Emiatt $A_1N=NC$ és $BAC\sphericalangle=A_1NC\sphericalangle=60°$, ahonnan következik, hogy az $A_1NC_\triangle$ szabályos. Következésképpen $A_1C=NC=AM$. Végezetül: F_1F_2 középvonal az AA_1C háromszögben, s ebből az következik, hogy $F_1F_2=\frac{1}{2}\cdot A_1C=\frac{1}{2}\cdot AM$, amit igazolni kellett.



2. megoldás: Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az $ABC_\triangle$ hegyesszögű, és az AB oldala hosszabb az AC oldalnál. A háromszög AC oldalán vegyünk fel egy D pontot úgy, hogy $AM = AD$ legyen. Ekkor az AMD_Δ egyenlő oldalú, ugyanis $AM = AD$, valamint az A csúcsban lévő szög $60°$. Mivel az F_2 pont az AC szakasz felezőpontja, és $AD = AM = CN$, így az F_2 pont a DN szakasznak is a felezőpontja. Az MND_Δ-ben ezek alapján F_1F_2 a háromszög középvonala, vagyis

$$F_1F_2 = \frac{1}{2} \cdot MD.$$



Figyelembe véve az AMD_Δ egyenlő oldalú voltát megkapjuk a feladat bizonyítandó állítását:

$$F_1F_2 = \frac{1}{2} \cdot MD = \frac{1}{2} \cdot AM.$$

Megjegyzés: ha a CN szakasz hossza nagyobb a CF_2 szakaszétól, a feladat megoldása akkor is hasonlóan alakul a fentiekhez.

---

5. feladat: Keresd meg az összes olyan pozitív egészekből álló (x, y, z) számhármast, amelyre érvényes, hogy $x \mid (y + 1)$, $\quad 2y \mid (z + 2) \quad$ és $\quad 3z \mid (x + 3)$.

Kekeňak Szilvia (Kassa, Felvidék)

Megoldás: Az $x \mid (y + 1)$, $\quad 2y \mid (z + 2) \quad$ és $\quad 3z \mid (x + 3)$ feltételekből következik, hogy $x \le y + 1$, $2y \le z + 2$ és $3z \le x + 3$. Szorozzuk be az első egyenlőtlenséget 2-vel és alkalmazzuk egymás után az első két egyenlőtlenséget. Ekkor azt kapjuk, hogy $2x \le 2y + 2 \le z + 4$, illetve hogy $2x - 4 \le z$. Figyelembe véve a $2x - 4 \le z$ és a $3z \le x + 3$ egyenlőtlenségeket adódik, hogy $3(2x - 4) \le 3z \le x + 3$, azaz $3(2x - 4) \le x + 3$. Az utóbbi egyenlőtlenség megoldása $x \le 3$. A $3z \mid (x+3)$ feltételből következik, hogy $3 \mid (x+3)$, ezért $3 \mid x$, így az $x \le 3$ feltételt is figyelembe véve adódik, hogy $x = 3$.

Figyelembe véve a $3z \mid (x+3)$ feltételt, azt kapjuk, hogy $3z \mid 6$, vagyis $z \mid 2$. Mivel $2y \mid (z+2)$ alapján z biztosan páros szám, így $z = 2$.

Visszahelyettesítve a kapott értékeket a $2x \le 2y + 2 \le z + 4$ egyenlőtlenségbe, adódik, hogy $6 \le 2y + 2 \le 6$, ahonnan $y = 2$.

A feladat egyetlen megoldása tehát a $(3, 2, 2)$ számhármas.

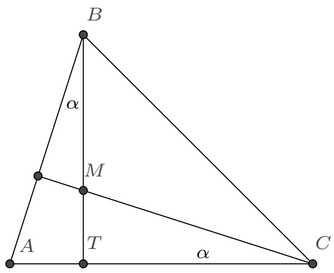
---

6. feladat: Az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontja M. Igazold, hogy ha $MC = AB$, akkor az $ACB\sphericalangle = 45°$. Igaz-e az állítás tompaszögű háromszögben is?

Katz Sándor (Bonyhád, Magyarország)

Megoldás: Az ábrán α-val jelölt ABT és TCM szögek egyenlők, mert merőleges szárú hegyesszögek. A feladat feltétele szerint az AB és MC szakaszok egyenlők, ezért az ATB és

MTC derékszögű háromszögek egybevágók, mert egyenlők az átfogóik és a szögeik. Így az α szög melletti befogók is egyenlők, azaz $BT = TC$. Tehát a BTC derékszögű háromszög egyenlő szárú, ezért $ACB\sphericalangle = 45°$.



Ha a háromszög tompaszögű, és a tompaszög A-nál vagy B-nél van, akkor a fenti megoldással azonos módon igazolható, hogy $ACB\sphericalangle = 45°$. Ha viszont C-nél van a tompaszög, akkor $MC = AB$ teljesülhet, de nyilván $ACB\sphericalangle = 45°$ nem teljesülhet. Az α-val jelölt szögek most is merőleges szárúak, ezért egyenlők, és ha $MC = AN$, akkor az MTC és ATB derékszögű háromszögek egybevágók. Ezért az α-val szemközti oldalak egyenlők, azaz $BT = TC$, tehát a BTC háromszög itt is egyenlő szárú, derékszögű, így itt $TCB\sphericalangle = 45°$. Tehát most $ACB\sphericalangle = 135°$.