8. (9.) évfolyam

1. feladat

Igazold, hogy az $n^{2015} - n^{2011}$ szám osztható 30-cal, bármely n természetes szám esetén!

2. feladat

Egy 256 cm^2 területű négyzetnek levágtunk a sarkaiból négy egymással egybevágó egyenlőszárú derékszögű háromszöget. Az így kapott nyolcszög kerülete egyenlő a levágott négy háromszög kerületének az összegével. Számítsd ki a nyolcszög kerületét és területét!

3. feladat

a) Ha $a, b, c \in \mathbb{R}$, igazold, hogy teljesül a következő azonosság:

$$(a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (-a+b+c)^2 + (a+b+c)^2 = 4(a^2+b^2+c^2).$$

b) Igazold, hogy $2014^{2014} + 2016^{2016} + 2018^{2018}$ felírható négy különböző egész szám négyzeteinek összegeként!

4. feladat

Adott az *ABCD* konvex (domború) négyszög, melyben *A*∢ és *B*∢ pótszögek. Igazold, hogy:

a) $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$;

b) az *ABCD* négyszög síkjában a *D* pontban az *AD* oldalra és a *C* pontban a *BC* oldalra húzott merőlegesek, egymásra is merőlegesek!

5. feladat

Egy nagy kockát ragasztunk össze 27 darab szabályos dobókockából, majd a nagy kocka tetszőleges öt lapjának mindegyikéből kivesszük a középső dobókockát. Mennyi lehet az így kapott mértani test felületén látható pöttyök száma, ha az a lehető legkevesebb? (A szabályos dobókocka lapjai 1-től 6-ig pöttyözöttek, és a szemközti lapokon lévő pöttyök számának összege 7).

6. feladat

Koppány szereti a csokit. Ahhoz, hogy ne vigye túlzásba a fogyasztását, anyukája egy páncélszekrénybe zárta a csokikat. A páncélszekrény zárszerkezetéhez egy jobbra vagy balra fordítható kulcs és egy kijelző tartozik. A zárszerkezet működési elve a következő: a kijelzőn egy változó értékű k természetes szám jelenik meg, amely egy másik, szintén változó $n = 2^k$ számnak felel meg. Ha a kulcsot jobbra fordítják akkor a zárszerkezethez tartozó tárcsa $2 \cdot n$

Megjegyzések:
- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár.

elemi fordulatot tesz és a k értéke eggyel növekszik, ha pedig balra akkor $\frac{n}{2}$ elemi fordulatot tesz és a k értéke pedig eggyel csökken. A tárcsa mindig azonos irányba forog. A páncélszekrény csak akkor nyit, ha először k-szor jobbra fordítják a kulcsot, ezek után a k értéke visszaáll az eredeti k értékre, amit az elején a kijelzőn láttunk és ezek után k-szor balra fordítják. Ha becsukják a páncélszekrényt, k értéke eggyel növekszik az előbbi becsukásnál kapott k értékhez viszonyítva (a k értékét csak a zárszerkezet módosíthatja). Koppány megtalálta a páncélszekrény nyitásának leírását és néhányszor már „szerzett” csokit. Milyen érték volt a kijelzőn, ha tudjuk, hogy a tárcsa az utolsó nyitáskor 2015 elemi fordulatot tett? Mennyi elemi fordulat volt a harmadik nyitáskor?

Megjegyzések:

- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár.