23. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Csíkszereda, 2014. március 12-16.

12. osztály

1. feladat: Az ABC háromszögben $ACB\sphericalangle = 60°$ és $AC \leq BC$. Legyen D az AC oldal egy belső pontja. Vedd fel az E pontot a BC oldal belsejében úgy, hogy $AD = BE$ teljesüljön. A DE szakasz fölé rajzold meg a DEF szabályos háromszöget úgy, hogy DEF és ABC azonos körüljárásúak legyenek. Bizonyítsd be, hogy az F pont illeszkedik az ABC háromszög köré írt körre!

Nemecskó István (Budapest)

2. feladat: Az $ABCDEFGH$ kocka élének a hossza 1 cm. Egy hangya az A csúcsból indulva egy 2014 cm hosszúságú utat jár be úgy, hogy csak az éleken közlekedik (egy élen végig mehet többször is). Melyik útból van több: amelyik az A csúcsban, vagy amelyik a C csúcsban végződik?

Kekeňák Szilvia (Kassa)

3. feladat: Adottak az $a, b, c \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ számjegyek úgy, hogy az $\overline{abc}$ háromjegyű szám prímszám. Bizonyítsd be, hogy az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek nincsenek racionális gyökei!

dr. Bencze Mihály (Bukarest)

4. feladat: Az $\dfrac{1}{2014! \cdot 2015!}$ racionális szám tizedes tört alakja

$$0, a_1a_2 \dots a_n(b_1b_2 \dots b_k),$$

ahol $(b_1b_2 \dots b_k)$ az ismétlődő szakasz és az n, illetve k értéke a lehető legkisebb. Mennyi az n értéke?

dr. Gecse Frigyes (Kisvárda)

5. feladat: Adott a p prímszám és a darab számozott doboz, ahol $a \geq 2$. Felírtuk p darab golyóra a számokat 1-től p-ig és a golyókat valahogyan elhelyeztük a dobozokban. Számold meg, hogy hány különböző elhelyezésre lesz az első dobozban található golyókon szereplő számok összege osztható p-vel! (Egy üres dobozban a golyókon szereplő számok összege egyezményesen 0.)

dr. András Szilárd, dr. Lukács Andor (Kolozsvár)

6. feladat: a) Határozd meg a síknak egységoldalú szabályos háromszögekkel és egységoldalú négyzetekkel való összes szabályos lefödését! Egy lefödés azt jelenti, hogy a sokszögek hézag és átfödés nélkül (egyrétűen) lefödik a síkot. A lefödés szabályos, ha léteznek olyan a, b nullától különböző természetes számok, amelyekre minden keletkező csúcs körül pontosan a darab háromszög és b darab négyzet van, valamilyen rögzített sorrendben.

b) Bizonyítsd be, hogy létezik végtelen sok, páronként különböző, nem feltétlenül szabályos lefödés (az előbbi háromszögekkel és négyzetekkel), amelyekhez hozzárendelhetők az a, b nullától különböző természetes számok úgy, hogy minden keletkező csúcs körül pontosan a darab háromszög és b darab négyzet legyen, de ezeknek a sokszögeknek a sorrendje ne legyen minden csúcspontban ugyanolyan.

Zsombori Gabriella (Csíkszereda)

dr. András Szilárd, dr. Lukács Andor (Kolozsvár)