23. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Csíkszereda, 2014. március 12-16.

12. osztály

1. feladat: Az ABC háromszögben $ACB\sphericalangle = 60°$ és $AC \leq BC$. Legyen D az AC oldal egy belső pontja. Vedd fel az E pontot a BC oldal belsejében úgy, hogy $AD = BE$ teljesüljön. A DE szakasz fölé rajzold meg a DEF szabályos háromszöget úgy, hogy DEF és ABC azonos körüljárásúak legyenek. Bizonyítsd be, hogy az F pont illeszkedik az ABC háromszög köré írt körre!

Nemecskó István (Budapest)

Megoldás: Mivel $AC \leq BC$, következik, hogy $CD \leq CE$. Ha $CD = CE$, akkor az ABC háromszög egyenlő oldalú, és ekkor F egybeesik C-vel, azaz rajta van az ABC háromszög köré írt körön. Ha pedig $CD < CE$, akkor a CDE háromszögben $CED\sphericalangle < 60°$ ($DCE\sphericalangle = 60°$), azaz F a CDE háromszögön kívül esik.
Mivel $DCE\sphericalangle = DFE\sphericalangle = 60°$, ezért a $CDEF$ négyszög körbeírható. Ekkor $CEF\sphericalangle = CDF\sphericalangle$, és így $BEF\sphericalangle = ADF\sphericalangle$. Következik, hogy a DAF háromszög egybevágó az EBF háromszöggel ($AD = BE$, és $DF = EF$), és így $DAF\sphericalangle = EBF\sphericalangle$, azaz az $ABFC$ négyszög körbeírható. Tehát az F pont rajta van az ABC háromszög köré írt körön.

Megjegyzés: Az előbbi gondolatmenetből látható, hogy a tulajdonság fordítottja is igaz, tehát ha F illeszkedik a háromszög köré írt körre, akkor $AD = BE$.

---

2. feladat: Az $ABCDEFGH$ kocka élének a hossza 1 cm. Egy hangya az A csúcsból indulva egy 2014 cm hosszúságú utat jár be úgy, hogy csak az éleken közlekedik (egy élen végig mehet többször is). Melyik útból van több: amelyik az A csúcsban, vagy amelyik a C csúcsban végződik?

Kekeňák Szilvia (Kassa)

Megoldás: Jelentse X_i az A-ból az X pontba érkező i hosszúságú utak számát, ahol $X \in \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$, tehát A_{2014}-et kellene összehasonlítani C_{2014}-gyel. $E_1 = 1$ és $G_1 = 0$ (az A pontból induló és az E pontba érkező 1 hosszúságú utak száma 1, míg az A pontból induló és a G pontba érkező 1 hosszúságú utak száma 0). Következik, hogy

$$A_2 = B_1 + D_1 + E_1 > B_1 + D_1 + G_1 = C_2.$$

De ekkor

$$E_3 = A_2 + F_2 + H_2 > C_2 + F_2 + H_2 = G_3,$$

azaz

$$A_4 = B_3 + D_3 + E_3 > B_3 + D_3 + G_3 = C_4.$$

Ezt a gondolatmenetet folytatva matematikai indukcióval igazolhatjuk, hogy $A_{2n} > C_{2n}$, bármely n nullától különböző természetes számra. Valóban, ha bizonyos k természetes számra ($k \geq 2$) elfogadjuk, hogy $A_{2k} > C_{2k}$, akkor

$$E_{2k+1} = A_{2k} + F_{2k} + H_{2k} > C_{2k} + F_{2k} + H_{2k} = G_{2k+1},$$

azaz

$$\begin{aligned} A_{2k+2} &= B_{2k+1} + D_{2k+1} + E_{2k+1} > \\ &> B_{2k+1} + D_{2k+1} + G_{2k+1} = C_{2k+2}. \end{aligned}$$

Tehát $A_{2014} > C_{2014}$.

---

3. feladat: Adottak az $a, b, c \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ számjegyek úgy, hogy az $\overline{abc}$ háromjegyű szám prímszám. Bizonyítsd be, hogy az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek nincsenek racionális gyökei!

dr. Bencze Mihály (Bukarest)

Megoldás: A tízes számrendszerbeli reprezentáció alapján

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c.$$

Ha a feladatban megjelenő másodfokú egyenletnek van racionális megoldása, akkor létezik olyan $d \in \mathbb{N}$, amelyre $d^2 = b^2 - 4ac$. Világos, hogy $d < b$. Másrészt

$$4a \cdot \overline{abc} = 400a^2 + 40ab + 4ac = 400a^2 + 40ab + b^2 - d^2 =$$

$$= (20a + b)^2 - d^2 = (20a + b - d)(20a + b + d).$$

Mivel $\overline{abc}$ prímszám, osztja $(20a + b - d)$-t vagy $(20a + b + d)$-t. Ez ellentmondás, mert $\overline{abc} > 20a + b + d$ és $\overline{abc} > 20a + b - d$. Így $b^2 - 4ac$ nem lehet teljes négyzet, tehát

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \notin \mathbb{Q}.$$

Megjegyzés: A $b^2 - d^2 = 4ac$ egyenlet tárgyalásából is kiindulhatunk, ahol $c \in \{1, 3, 7, 9\}$ és a egy nemnulla számjegy. Ugyanakkor a tárgyalandó esetek számát lecsökkenti, ha az

$$\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$$

halmazban lévő teljes négyzetek közt fellépő 4-gyel osztható pozitív különbségeket állítjuk elő, és azokból határozzuk meg az a és c értékét.

---

4. feladat: Az $\dfrac{1}{2014! \cdot 2015!}$ racionális szám tizedes tört alakja

$$0,a_1a_2 \ldots a_n(b_1b_2 \ldots b_k),$$

ahol $(b_1b_2 \ldots b_k)$ az ismétlődő szakasz és az n, illetve k értéke a lehető legkisebb. Mennyi az n értéke?

dr. Gecse Frigyes (Kisvárda)

Megoldás: A vegyes szakaszos tizedes törtek átalakítási szabályát alkalmazva írhatjuk, hogy

$$0,a_1a_2 \ldots a_n(b_1b_2 \ldots b_k) = \frac{\overline{a_1a_2 \ldots a_nb_1b_2 \ldots b_k} - \overline{a_1a_2 \ldots a_n}}{\underbrace{99\ldots9}_{k}\underbrace{00\ldots0}_{n}}.$$

Ha $a_n = b_k$, akkor a szám felírható lenne

$$0, a_1 a_2 \dots a_{n-1}(a_n b_1 b_2 \dots b_{k-1})$$

alakban, és ez ellentmondana annak, hogy n a lehető legkisebb. Emiatt az előbbi tört számlálója nem osztható 10-zel, és így $2014! \cdot 2015!$ pontosan n nullában végződik.

$$2014! = 5^{402} \cdot 402! \cdot M_1 = 5^{402+80} \cdot 80! \cdot M_2 =$$

$$= 5^{402+80+16} \cdot 16! \cdot M_3 = 5^{402+80+16+3} \cdot 3! \cdot M_4,$$

ahol $M_1, M_2, M_3, M_4 \in \mathbb{N}$ és egyik sem osztható 5-tel. Ez alapján a 2014! prímtényezős felbontásában az 5 kitevője 501 (ez kiszámolható a Legendre tétel segítségével, az előbbi számolás lényegileg a Legendre tétel bizonyításának a gondolatmenete). Ebből következik, hogy a 2015! prímtényezős felbontásában az 5 kitevője 502, tehát a szorzat felbontásában az 5 hatványkitevője 1003. A 2-es hatványkitevője ennél nagyobb, tehát $n = 1003$.

---

5. feladat: Adott a p prímszám és a darab számozott doboz, ahol $a \geq 2$. Felírtuk p darab golyóra a számokat 1-től p-ig és a golyókat valahogyan elhelyeztük a dobozokban. Számold meg, hogy hány különböző elhelyezésre lesz az első dobozban található golyókon szereplő számok összege osztható p-vel! (Egy üres dobozban a golyókon szereplő számok összege egyezményesen 0.)

dr. András Szilárd, dr. Lukács Andor (Kolozsvár)

Megoldás: Ha $p = 2$, akkor pontosan azokban az esetekben lesz az első dobozban a golyókon levő számok összege páros, ha az első dobozban nincs golyó, vagy ha csak egyedül a 2-es számozású golyó van. Ez összesen $(a-1)^2 + (a-1)$ módon valósítható meg.

Ha $p \neq 2$, a feladatot a következő modell segítségével oldjuk meg. Egy adott elhelyezésnek feleltessünk meg egy szabályos p oldalú sokszöget a következő módon:

- a sokszög csúcsait ciklikusan megszámozzuk 1-től p-ig, tehát egy csúcs egy számozott golyónak fog megfelelni;
- minden csúcsot „kiszínezünk” az $1, 2, \dots, a$ színek valamelyikével.

Másrészt, ha felírjuk sorban az $1, 2, \dots, p$ számokat egy p oldalú szabályos sokszög csúcsaira, majd kiválasztunk a csúcsok közül k darabot és elforgatjuk a sokszöget a középpontja körül $\frac{360}{a}$ fokkal, akkor a kiválasztott csúcsokon szereplő számok mindegyike 1-gyel nő modulo p. Ez azt jelenti, hogy a kiválasztott k darab csúcson szereplő számok összege pontosan k-val fog növekedni modulo p. Végezzük el az előbbi forgatást $0, 1, 2, \dots, p-1$-szer. Ha eredetileg a kiválasztott csúcsokon levő számok összege s volt, akkor az egyes forgatások után a kapott összegek felveszik rendre az

$$s + 0, s + k, s + 2k, \dots, s + (p-1)k \tag{1}$$

értékeket modulo p. A következő három eset lehetséges:

- ha $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, akkor az előbbi összegek közül pontosan egy lesz osztható p-vel;
- ha $k = 0$, akkor $s = 0$, és minden új forgatott összeg is 0, vagyis osztható p-vel;
- ha $k = p$, akkor $s = \frac{p(p+1)}{2}$ és minden új forgatott összeg is ugyanennyi (és s osztható p-vel, mert p páratlan).

A k kiválasztott csúcs az első dobozban elhelyezett k golyón szereplő számoknak felel meg.

Ha minden $k \in \{0, 1, 2, \ldots, p\}$ esetén a (1) összegekből pontosan egy lenne osztható p-vel, akkor ez azt jelentené hogy összesen $\frac{a^p}{p}$ olyan dobozolás van, amelyekre az első dobozban levő golyókon a számok összege osztható p-vel. Viszont az előbbi tárgyalás alapján a $k = 0$ és $k = p$ eseteket külön kell vizsgáljuk:

- ha $k = 0$, akkor a fennmaradó $a - 1$ dobozba akárhogyan elhelyezhetjük a p golyót, és ez összesen $(a - 1)^p$ féleképpen lehetséges;
- ha $k = p$, akkor minden golyót az első dobozba helyeztünk, tehát összesen 1 lehetőségünk van.

Mivel minden egyes forgatás ezeket az eseteket önmagukba viszi, ezért ezeket le kell vonnunk a forgatások elvégzése előtt, és majd vissza is kell adnunk őket az összes lehetőség megszámolásához. Tehát összesen

$$\frac{a^p - (a-1)^p - 1}{p} + (a-1)^p + 1$$

lehetőségünk van a golyók elhelyezésére úgy, hogy az első dobozban levő golyókon a számok összege osztható legyen p-vel.

Megjegyzés: A feladat megoldását másképpen is befejezhetjük: megvizsgáljuk minden $k \in \{0, 1, 2, \ldots, p\}$-re, hogy hányféleképpen lehetséges, hogy az első dobozban pontosan k golyó van és az ezeken szereplő számok összege osztható p-vel. Már láttuk, hogy ez a szám $k = 0$ esetén $(a - 1)^p$ és $k = p$ esetén 1. Minden más k értékre viszont $\frac{\binom{p}{k}}{p} \cdot (a - 1)^{p-k}$ lehetőségünk van erre: összesen $\binom{p}{k}$ féle módon választhatunk ki k golyót az első dobozba, és minden egyes ilyen kiválasztás egyetlen „forgatása" lesz jó a sokszöges modell alapján. Viszont p ilyen forgatás van, ezért kell osztanunk p-vel. A fennmaradt $p - k$ golyót akárhogyan betehetjük a többi dobozba, innen adódik az $(a - 1)^{p-k}$ szorzó. Tehát összesen

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}(a-1)^{p-k} + (a-1)^p + 1 = \frac{a^p - (a-1)^p - 1}{p} + (a-1)^p + 1$$

lehetőségünk van a golyók kért dobozolására.

---

6. feladat: a) Határozd meg a síknak egységoldalú szabályos háromszögekkel és egységoldalú négyzetekkel való összes szabályos lefödését! Egy lefödés azt jelenti, hogy a sokszögek hézag és átfödés nélkül (egyrétűen) lefödik a síkot. A lefödés szabályos, ha léteznek olyan a, b nullától különböző természetes számok, amelyekre minden keletkező csúcs körül pontosan a darab háromszög és b darab négyzet van, valamilyen rögzített sorrendben.

b) Bizonyítsd be, hogy létezik végtelen sok, páronként különböző, nem feltétlenül szabályos lefödés (az előbbi háromszögekkel és négyzetekkel), amelyekhez hozzárendelhetők az a, b nullától különböző természetes számok úgy, hogy minden keletkező csúcs körül pontosan a darab háromszög és b darab négyzet legyen, de ezeknek a sokszögeknek a sorrendje ne legyen minden csúcspontban ugyanolyan.

Zsombori Gabriella (Csíkszereda)

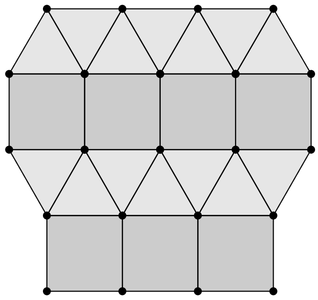
dr. András Szilárd, dr. Lukács Andor (Kolozsvár)

Megoldás: Javasoljuk elolvasni mind a négy évfolyam utolsó feladatának a megoldását az évfolyamok sorszámának növekvő sorrendjében.

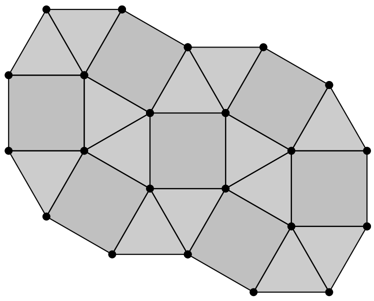
a) Egy csúcspontban négy vagy öt alakzat találkozhat, viszont ha négy találkozna – és lenne közöttük legalább egy háromszög, illetve legalább egy négyzet –, akkor a csúcs körül a megmaradt két szög összege

$$360^\circ - (60^\circ + 90^\circ) = 210^\circ$$

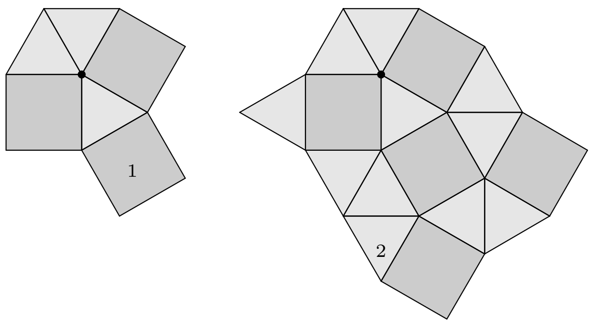
kellene legyen, ami lehetetlen. Tehát minden csúcs körül öt alakzatnak kell találkoznia, és ezért az $a \cdot 60^\circ + b \cdot 90^\circ = 360^\circ$ és $a + b = 5$ egyenletekből álló rendszert kell megoldanunk a pozitív természetes számok halmazán. Az egyetlen megoldás: $a = 3$ és $b = 2$. Következésképpen a csúcsok $(3,3,3,4,4)$ vagy $(3,3,4,3,4)$ típusúak lehetnek. Ha a csúcsok $(3,3,3,4,4)$ típusúak lennének, akkor az első felrajzolt ilyen szerkezetű csúcs egyértelműen meghatározza az összes többit, a szabályos lefödés pedig



Ha a csúcsok mind $(3,3,4,3,4)$ típusúak, akkor az első felrajzolt csúcs ismét egyértelműen meghatározza az összes többit és a következő szabályos lefödést kapjuk:

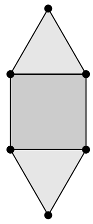


Az egyértelműség azért következik ebben az esetben, mert ha kiindulunk egy $(3,3,4,3,4)$ típusú csúcsból, akkor a következő bal oldali ábrán az 1-es helyre rajzolt négyzeten kívül minden berajzolt négyzet vagy háromszög egyértelműen meghatározott.

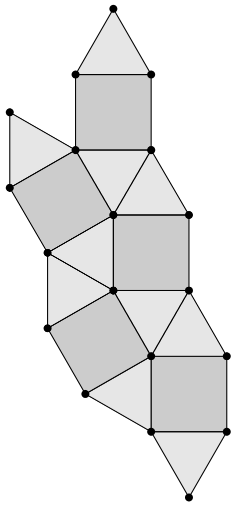


Ha viszont négyzetet választunk az 1-es helyre, utána ismét minden egyértelműen meghatározott, és a 2-es helyre szükségszerűen háromszög kell kerüljön. Ez viszont elrontja a szabályosságot.

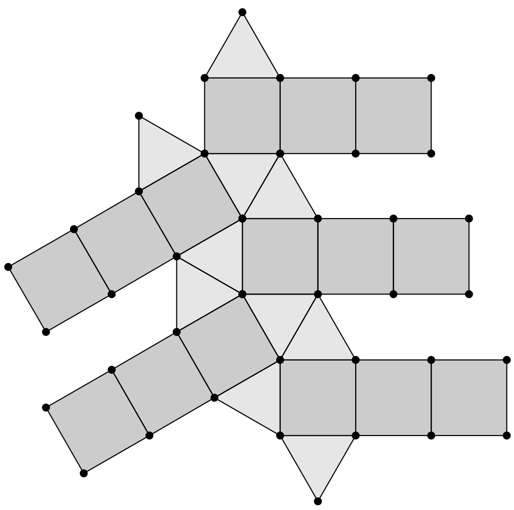
b) Induljunk ki az



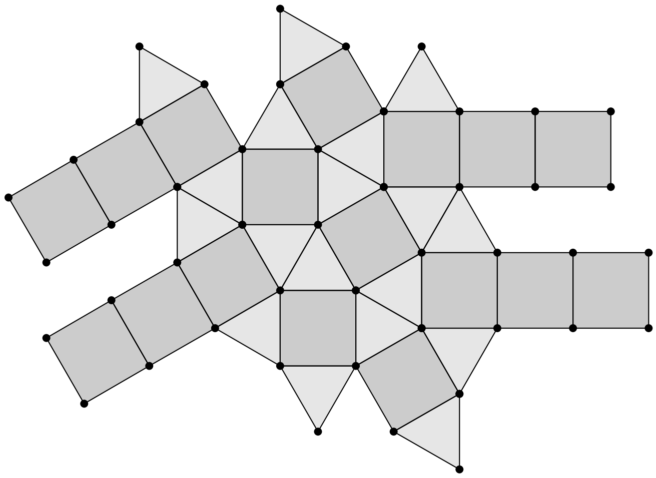
mintázatból és a segítségével hozzuk létre a következő, végtelen magas sávokat:



egy ilyen sáv bal- és jobb oldalát kiegészíthetjük most négyzetekkel (és a fennmaradó sávokban háromszögekkel) az alábbi módon:



Viszont készíthetünk olyan lefödéseket, amelyekben a kiinduló sávunkból $2, 3, 4, \ldots$ darab található egymás mellett:



Tehát végtelen sok különböző kért lefödés létezik.