23. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Csíkszereda, 2014. március 12-16.

11. osztály

1. feladat: Milyen szabály szerint írtuk le a

$$2, 10, 16, 32, 42, 66, 80, 112, 130, 170$$

számokat? Ezt a szabályt folytatva, add meg a

$$2, 10, 16, 32, 42, 66, 80, 112, 130, 170, \ldots$$

sorozat általános tagjának a képletét!

dr. Kántor Sándorné (Debrecen)

2. feladat: Oldd meg az $x^{\log_3 64} = x^2 \cdot 8^{\log_3 x} - x^{\log_3 8}$ egyenletet a valós számok halmazán!

Balázsi Borbála (Beregszász)

3. feladat: Legfeljebb hány elemet tartalmazhat a

$$H = \{1, 2, 3, \ldots, 25\}$$

halmaznak az a részhalmaza, amelyben bármely két szám szorzata nem négyzetszám? Adj meg egy ilyen részhalmazt!

Bíró Béla (Sepsiszentgyörgy)

4. feladat: Az e és f egyenesek párhuzamosak és egymástól egységnyi távolságra vannak. Vedd fel az e egyenesen az $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, A_{n+1}$ pontokat és az f egyenesen a $B_1, B_2, \ldots, B_n$, B_{n+1} pontokat úgy, hogy mindkét egyenesen bármely két szomszédos pont távolsága egységnyi, és minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n+1$ számra az A_iB_i szakasz merőleges az e és f egyenesekre. Kösd össze az A_1 pontot a B_n és B_{n+1} pontokkal. Az összekötő szakaszok az A_2B_2 szakaszt rendre a P és Q pontokban metszik.

a) Van-e olyan pozitív egész n szám, amelyre az A_1PQ háromszög területe $\dfrac{1}{1802}$ területegység?

b) Van-e olyan pozitív egész n szám, amelyre az A_1PQ háromszög területe $\dfrac{1}{1860}$ területegység?

Bíró Bálint (Eger)

5. feladat: Egy szabályos kilencszögben meghúztuk az összes átlót. Van-e a kilencszög belsejében olyan pont, amelyre legalább három átló illeszkedik?

Zsombori Gabriella (Csíkszereda)

dr. András Szilárd (Kolozsvár)

6. feladat: a) Határozd meg a síknak egységoldalú szabályos háromszögekkel, egységoldalú négyzetekkel és egységoldalú szabályos hatszögekkel való összes szabályos lefödését! Egy lefödés azt jelenti, hogy a sokszögek hézag és átfödés nélkül (egyrétűen) lefödik a síkot. A lefödés szabályos, ha léteznek olyan a, b és c nullától különböző természetes számok, amelyekre minden keletkező csúcs körül pontosan a darab háromszög, b darab négyzet és c darab hatszög van, valamilyen rögzített sorrendben.

b) Bizonyítsd be, hogy létezik végtelen sok olyan, nem feltétlenül szabályos lefödés, amelyhez hozzárendelhető valamilyen a, b és c nullától különböző természetes szám úgy, hogy minden keletkező csúcs körül pontosan a darab háromszög, b darab négyzet és c darab hatszög legyen!

Zsombori Gabriella (Csíkszereda)

dr. András Szilárd, dr. Lukács Andor (Kolozsvár)