23. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Csíkszereda, 2014. március 12-16.

11. osztály

1. feladat: Milyen szabály szerint írtuk le a

$$2, 10, 16, 32, 42, 66, 80, 112, 130, 170$$

számokat? Ezt a szabályt folytatva, add meg a

$$2, 10, 16, 32, 42, 66, 80, 112, 130, 170, \ldots$$

sorozat általános tagjának a képletét!

dr. Kántor Sándorné (Debrecen)

Megoldás: Írjuk fel az adott sorozat szomszédos tagjai különbségének a sorozatát, vagyis a differenciasorozatot:

$$8, 6, 16, 10, 24, 14, 32, 18, 40, \ldots$$

A differenciasorozat páratlan sorszámú tagjai a $8, 16, 24, \ldots$ számtani sorozat tagjai. A differenciasorozat páros sorszámú tagjai a $6, 10, 14, \ldots$ számtani sorozat tagjai. Az eredetileg adott sorozat n-edik tagja

$$a_n = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 8 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 8 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 8 + \ldots.$$

Ha n páratlan, azaz ha $n = 2k + 1$, alakú, akkor

$$a_{2k+1} = 2[(1 + 3 + \ldots + (2k + 1)] + 8(1 + 2 + 3 + \ldots + k) =$$

$$= 2(k + 1)^2 + 8\frac{k^2 + k}{2} = 6k^2 + 8k + 2 = 6\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + 8\frac{n-1}{2} + 2,$$

mivel $k = \frac{n-1}{2}$. Így páratlan n-re

$$a_n = \frac{3}{2}n^2 + n - \frac{1}{2}.$$

Páros n-ekre, azaz $n = 2k$, esetén

$$a_{2k} = 2[1 + 3 + \ldots + (2k - 1)] + 8(1 + 2 + \ldots + k).$$

Innen az előzőhöz hasonlóan kapjuk, hogy

$$a_{2k} = 2k^2 + 8\frac{k^2 + k}{2} = 6k^2 + 4k.$$

Itt $n = 2k$ miatt k helyére $\frac{n}{2}$-t írva, páros n-ekre

$$a_n = \frac{3}{2}n^2 + 2n.$$

Megjegyzés: Az a_n képlet egységes formában is felírható, figyelembe véve, hogy a páros és a páratlan sorszámú tagok közti különbség $\frac{2n+1}{2}$. Az általános tag tehát:

$$a_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - \frac{1}{4} + (-1)^n\left(\frac{2n+1}{4}\right).$$

---

2. feladat: Oldd meg az $x^{\log_3 64} = x^2 \cdot 8^{\log_3 x} - x^{\log_3 8}$ egyenletet a valós számok halmazán!

Balázsi Borbála (Beregszász)

Megoldás: Az egyenlet értelmezési tartománya a pozitív valós számok halmaza. Mivel $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, ha $a, b, c > 0$ és $b \neq 1$, az egyenlet átírható

$$8^{\log_3 x} = x^2 - 1$$

alakba. Az $y = \log_3 x$ jelöléssel $x^2 = 9^y$, tehát az egyenlet

$$8^y = 9^y - 1.$$

Innen

$$\left(\frac{8}{9}\right)^y + \left(\frac{1}{9}\right)^y = 1.$$

A bal oldalon egy szigorúan csökkenő függvény van, ezért az egyenletnek legfeljebb egy gyöke lehet. Ez a gyök $y = 1$, és így az eredeti egyenletnek $x = 3$ az egyetlen megoldása.

---

3. feladat: Legfeljebb hány elemet tartalmazhat a

$$H = \{1, 2, 3, \ldots, 25\}$$

halmaznak az a részhalmaza, amelyben bármely két szám szorzata nem négyzetszám? Adj meg egy ilyen részhalmazt!

Bíró Béla (Sepsiszentgyörgy)

Megoldás: Legyen K a keresett részhalmaz. Mivel bármely két teljes négyzet szorzata is teljes négyzet, ezért a K-ban legfennebb egyetlen négyzetszám lehet. Vagyis az 1,4,9,16, 25 számok közül pontosan egy szerepelhet K-ban. Az általánosság leszűkítése nélkül feltételezhetjük, hogy $1 \in K$. Másrészt az $\{5, 20\}$, $\{3, 12\}$ illetve $\{6, 24\}$ számpárok komponensei közül legfennebb egy-egy szerepelhet K-ban, mert a párok komponenseinek szorzata teljes négyzet. Harmadrészt a $2, 8, 18$ számhármasból legfennebb egy komponens szerepelhet K-ban, mert közülük bármely kettőnek a szorzata teljes négyzet. Innen következik, hogy a K-ban legfennebb $25-4-3-2 = 16$ szám szerepelhet. Negyedrészt bizonyítható, hogy ez a 16-os elemszám elérhető. Például a

$$K = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23\}$$

részhalmaz teljesíti a feladat feltételeit.

---

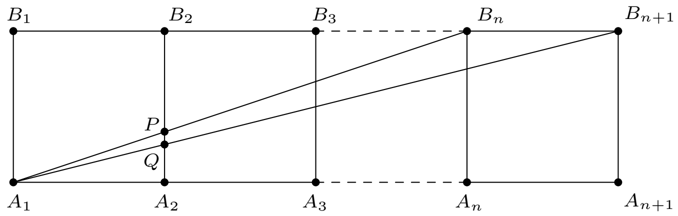
4. feladat: Az e és f egyenesek párhuzamosak és egymástól egységnyi távolságra vannak. Vedd fel az e egyenesen az $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, A_{n+1}$ pontokat és az f egyenesen a $B_1, B_2, \ldots, B_n$, B_{n+1} pontokat úgy, hogy mindkét egyenesen bármely két szomszédos pont távolsága egységnyi, és minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n+1$ számra az A_iB_i szakasz merőleges az e és f egyenesekre. Kösd össze az A_1 pontot a B_n és B_{n+1} pontokkal. Az összekötő szakaszok az A_2B_2 szakaszt rendre a P és Q pontokban metszik.

a) Van-e olyan pozitív egész n szám, amelyre az A_1PQ háromszög területe $\dfrac{1}{1802}$ területegység?

b) Van-e olyan pozitív egész n szám, amelyre az A_1PQ háromszög területe $\dfrac{1}{1860}$ területegység?

Bíró Bálint (Eger)

Megoldás: a) A szöveg alapján $A_iA_{i+1}B_{i+1}B_i$ egységnyi oldalú négyzetek, amelyek a következő vázlatos ábrának megfelelően helyezkednek el.



A megfelelő szögek egyenlősége miatt az A_1A_2P és $A_1A_nB_n$ háromszögek hasonlók, ezért megfelelő oldalaik aránya egyenlő, azaz $\frac{A_1A_2}{PA_2} = \frac{A_1A_n}{A_nB_n}$. Ebből $A_1A_2 = A_nB_n = 1$ és $A_1A_n = n-1$ miatt $PA_2 = \frac{1}{n-1}$. Nyilvánvaló, hogy $n \neq 1$, hiszen ha csak egy négyzet szerepelne az ábrán, akkor a P, Q pontok nem jöhetnének létre. A megfelelő szögek egyenlősége miatt az A_1A_2Q és $A_1A_{n+1}B_{n+1}$ háromszögek szintén hasonlók, ezért megfelelő oldalaik aránya egyenlő, vagyis

$$\frac{A_1A_2}{QA_2} = \frac{A_1A_{n+1}}{A_{n+1}B_{n+1}}.$$

Ez alapján $QA_2 = \frac{1}{n}$, tehát

$$PQ = PA_2 - QA_2 = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n \cdot (n-1)}.$$

Az A_1PQ háromszögnek a PQ oldalhoz tartozó magassága az $A_1A_2 = 1$ szakasz, ezért a háromszög területére azt kapjuk, hogy

$$T = \frac{PQ \cdot A_1A_2}{2} = \frac{1}{2n \cdot (n-1)}.$$

Ha az A_1PQ háromszög területe $\dfrac{1}{1802}$, akkor

$$2n \cdot (n-1) = 1802.$$

Ennek az egyenletnek nincs pozitív egész megoldása, mert $n \cdot (n-1)$ páros szám, így a bal oldala 4-gyel osztható, míg 1802 nem osztható 4-gyel, tehát az a) kérdésre a válasz az, hogy ilyen n nem létezik.

Ha az A_1PQ háromszög területe $\frac{1}{1860}$, akkor $\frac{1}{2n\cdot(n-1)} = \frac{1}{1860}$, vagyis $2n \cdot (n-1) = 1860$, ahonnan $n^2 - n - 930 = 0$.

A megoldások $n_1 = 31$ és $n_2 = -30$. Az $n_2 = -30$ nyilván nem felel meg a feltételeknek, tehát a b) kérdésre $n = 31$ a válasz.

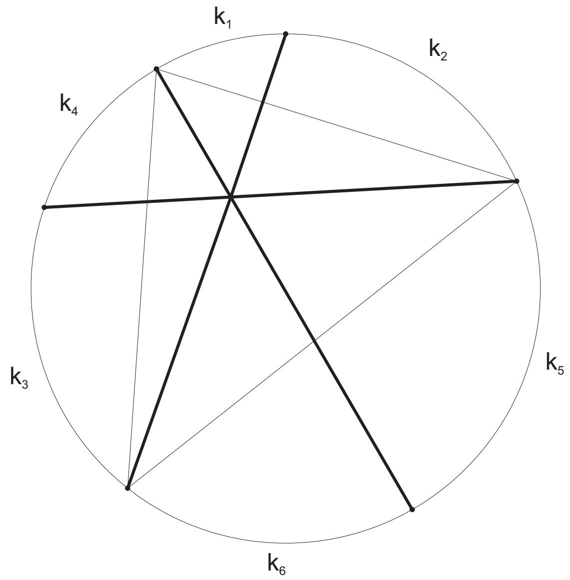
---

5. feladat: Egy szabályos kilencszögben meghúztuk az összes átlót. Van-e a kilencszög belsejében olyan pont, amelyre legalább három átló illeszkedik?

Zsombori Gabriella (Csíkszereda)

dr. András Szilárd (Kolozsvár)

Megoldás: A szabályos kilencszög szögei $140°$-osak. (Egy szabályos n-oldalú sokszög szögeinek összege $(n-2)\cdot 180°$, tehát egyik szöge $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.) Ekkor egy oldalt közrefogó kerületi szög mértéke $\alpha = 20°$. Tételezzük fel, hogy van három olyan átló, amelyek a kilencszög belsejében összefutnak. Ekkor ezek közül semelyik kettő nem találkozhat ugyanabban a csúcsban. A mellékelt ábrán vastagítva látható ez a három átló. Ugyanakkor az ábrán két csúcs közé beírt k_i nullától különböző természetes szám jelentse azt, hogy az $\alpha = 20°$ hányszorosát fogja közre ehhez a két csúcshoz tartozó kerületi szög ($i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).



Ekkor

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 = 9$$

és a Ceva-tétel trigonometrikus alakját felírva:

$$\frac{\sin(k_1\alpha)}{\sin(k_2\alpha)} \cdot \frac{\sin(k_3\alpha)}{\sin(k_4\alpha)} \cdot \frac{\sin(k_5\alpha)}{\sin(k_6\alpha)} = 1.$$

A $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ nullától különböző természetes számokat rendezzük növekvő sorrendbe. Ekkor az első nem lehet 1-nél nagyobb (ha legalább 2 lenne, akkor a hat szám összege legalább 12 lenne). Hasonló meggondolásból a második és a harmadik szám sem lehet 1-nél nagyobb. Ekkor $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ lehetséges - növekvő sorrendbe szedett - értékei:

$$\{1,1,1,1,1,4\} \quad \{1,1,1,1,2,3\} \quad \{1,1,1,2,2,2\}$$

• $\{1,1,1,1,1,4\}$ esetén a trigonometrikus összefüggés

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha}=1 \text{ vagy } \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin 4\alpha}=1$$

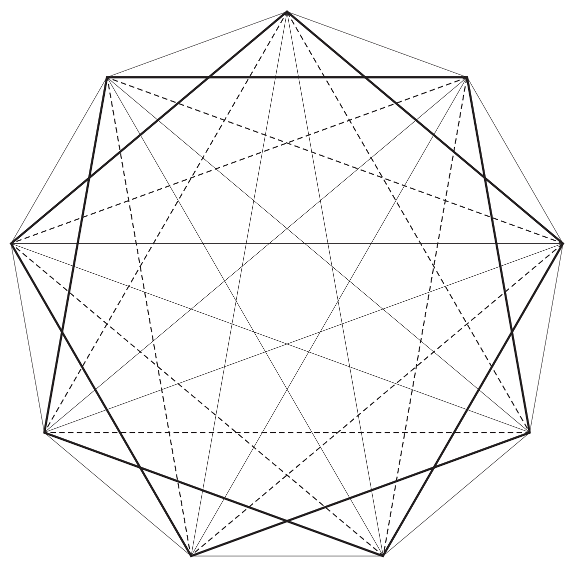
lenne és mindkettő a $\sin 80^\circ=\sin 20^\circ$ egyenlőséget eredményezné, ami nem igaz.

• $\{1,1,1,1,2,3\}$ esetén a trigonometrikus összefüggésből $\sin 40^\circ=\sin 60^\circ$ vagy $\sin 40^\circ\sin 60^\circ=\sin 20^\circ\sin 20^\circ$ következne, ami szintén lehetetlen. (A szinusz függvény 0° és 90° között szigorúan növekvő és pozitív értékeket vesz fel.)

• $\{1,1,1,2,2,2\}$ esetén szintén a trigonometrikus összefüggésből $(\sin 20^\circ)^3=(\sin 40^\circ)^3$ vagy $\sin 20^\circ=\sin 40^\circ$ következne, ami nem igaz.

Tehát nincs három olyan átló, amelyek a kilencszög belsejében összefutnak.

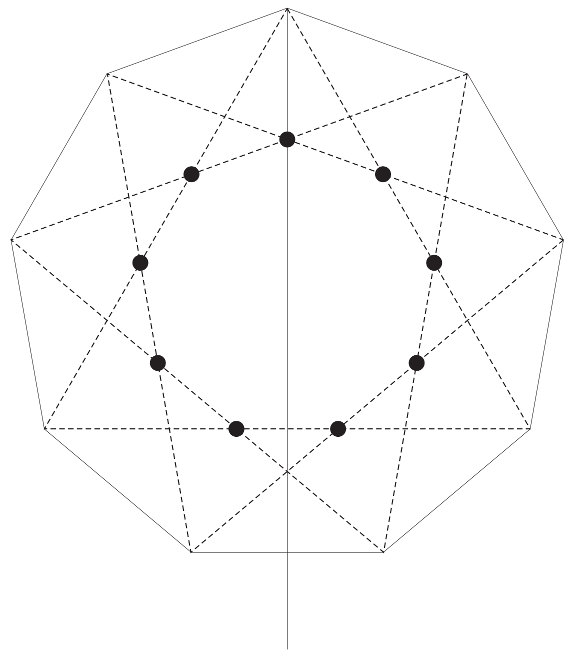
2. megoldás: A mellékelt ábrán megfigyelhető, hogy három típusú átlója van egy szabályos kilencszögnek.



Nevezzük 1-es típusúnak azokat az átlókat (az ábrán a vastagított szakaszok), amelyeknek egyik oldalán pontosan egy csúcspont található. Legyenek 2-es típusúak azok az átlók (az ábrán a szaggatott szakaszok), amelyeknek egyik oldalán pontosan két csúcspont található és 3-as típusúak azok az átlók, amelyeknek egyik oldalán pontosan három csúcspont van.

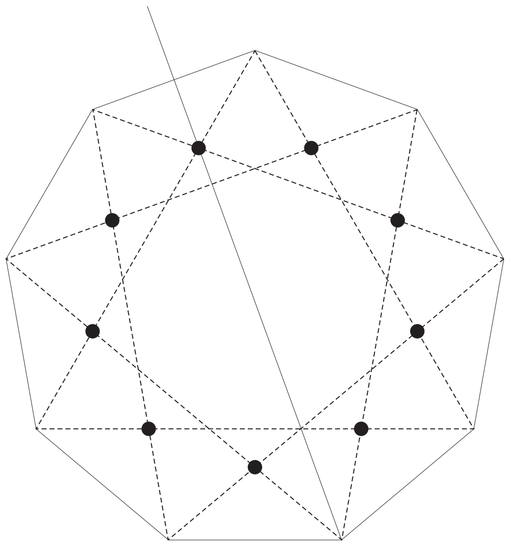
Mivel az 1-es típusú átlók egyik oldalán pontosan egy csúcspont van, ebből a csúcspontból kell egy másik (ezt metsző) átló kiinduljon. Viszont így nem marad csúcspont, amiből egy harmadik is kiinduljon és az első kettővel összefusson. Tehát az $\{1,1\}$, $\{1,2\}$, illetve $\{1,3\}$ metszéspontok nem lehetnek összefutási pontok.

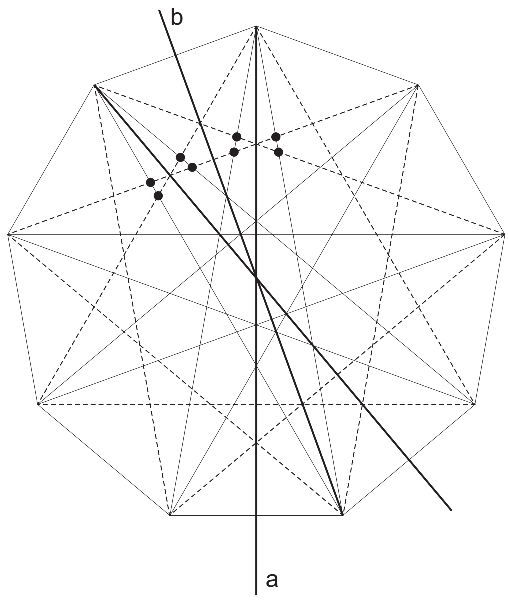
Vizsgáljuk most a $\{2,2\}$ metszéspontokat. Ezek a metszéspontok mind rajta vannak a kilencszög egy-egy olyan szimmetriatengelyén, amelyek áthaladnak egy csúcson. Ha a $\{2,2\}$ metszéspont az ábrán látható típusú, akkor ez nem lehet összefutási pont.



Valóban, ha kiválasztunk egy csúcsot és ezen a csúcson keresztül behúzzuk a kilencszögnek a szimmetriatengelyét, akkor az ehhez a csúcshoz legközelebb eső csúcsok által meghatározott 2-es típusú átlók ezen szimmetriatengelyen való metszéspontjáról van szó, így ez nem lehet összefutási pont.

Ebből következik, hogy a $\{2,2\}$ másik típusú metszéspontok sem lehetnek összefutási pontok (nem eshetnek egybe az első típusú $\{2,2\}$ metszéspontokkal és szimmetriatengelyen vannak - lásd az ábrát). Hasonlóan tárgyalható le az is, hogy a $\{3,3\}$ metszéspontok sem lehetnek összefutási pontok. Hátra van még a $\{2,3\}$ metszéspontok vizsgálata. Ezek a metszéspontok eddigi egyetlen metszésponttal sem eshetnek egybe. Ezen kívül, ha megfigyeljük a mellékelt ábrát, egy kiválasztott csúcsból húzott, a szimmetriatengelyen találkozó 2-es típusú átlók (azok, amelyeknek a találkozási pontja a csúcshoz a lehető legközelebb esik, de nem esik egybe azzal) ugyanabból a csúcsból induló 3-as típusú átlókkal négy különböző metszéspontot határoznak meg. Tükrözzük ezt a négy metszéspontot a b szimmetriatengelyre nézve, az ábrán látható módon. Ekkor négy újabb $\{2,3\}$ metszéspontot kapunk.





A két-két - b tengelyhez közelebb eső - metszéspont egyike sem eshet a b tengelyre (ezáltal egybeesve egy másikkal), mivel ezen pontok b tengelyen találkozó tartóegyenesei azonos típusúak (ezek pedig nem lehetnek összefutási pontok).
Tehát nincs három olyan átló, amelyek összefutnának.

Megjegyzés: P. L. Wantzel bizonyította be 1837-ben, hogy ha az n természetes szám páratlan prímtényezői nem különböző Fermat-prímek, akkor a szabályos n-szög nem szerkeszthető meg körzővel és vonalzóval. Mivel a 9 prímtényezői nem különbözőek, ezért a szabályos kilencszög nem szerkeszthető meg euklideszi eszközökkel. (Fermat-prímeknek az $F_n = 2^{2^n}+1$ alakú prímszámokat nevezzük, ahol n természetes szám. A jelenleg ismert Fermat-prímek: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, és $F_4 = 65537$.)

---

6. feladat: a) Határozd meg a síknak egységoldalú szabályos háromszögekkel, egységoldalú négyzetekkel és egységoldalú szabályos hatszögekkel való összes szabályos lefödését! Egy lefödés azt jelenti, hogy a sokszögek hézag és átfödés nélkül (egyrétűen) lefödik a síkot. A lefödés szabályos, ha léteznek olyan a, b és c nullától különböző természetes számok, amelyekre minden keletkező csúcs körül pontosan a darab háromszög, b darab négyzet és c darab hatszög van, valamilyen rögzített sorrendben.

b) Bizonyítsd be, hogy létezik végtelen sok olyan, nem feltétlenül szabályos lefödés, amelyhez hozzárendelhető valamilyen a, b és c nullától különböző természetes szám úgy, hogy minden keletkező csúcs körül pontosan a darab háromszög, b darab négyzet és c darab hatszög legyen!

Zsombori Gabriella (Csíkszereda)

dr. András Szilárd, dr. Lukács Andor (Kolozsvár)

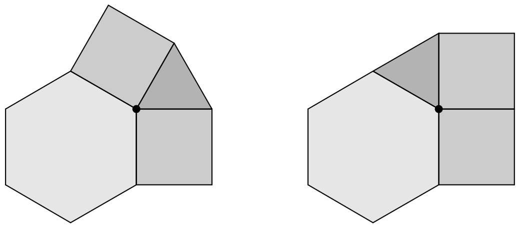
Megoldás: Javasoljuk elolvasni mind a négy évfolyam utolsó feladatának a megoldását az évfolyamok sorszámának növekvő sorrendjében. Az a) pont megoldásához észrevesszük, hogy egy csúcspontban négy vagy öt alakzat találkozhat.

Abban az esetben, ha csak négy alakzat találkozik, a következő eseteket különböztetjük meg:

• Ha ezek között egy hatszög, a darab háromszög és b darab négyzet, akkor

$$a \cdot 60° + b \cdot 90° + 120° = 360°.$$

Így a $\begin{cases} 2a+3b &= 8 \\ a+b &= 3 \end{cases}$ egyenletrendszert kell megoldanunk a pozitív egész számok halmazán, aminek a megoldása $a = 1$ és $b = 2$. Tehát csak a $(3, 4, 4, 6)$ és $(4, 3, 4, 6)$ elrendezések lehetségesek egy csúcs körül:



Ha két hatszög van, akkor az előbbi jelöléseket alkalmazva

$$a \cdot 60^\circ + b \cdot 90^\circ + 240^\circ = 360^\circ$$

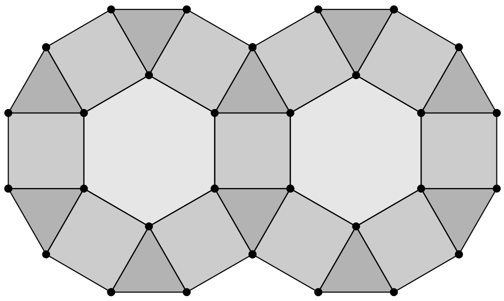
összefüggés kell teljesüljön. Mivel ebben az esetben $a + b = 2$ is fennáll, nincs megoldásunk.

• Abban az esetben, ha egy csúcspontban öt alakzat találkozik, mivel az alakzatok között kell legyen háromszög, négyzet és hatszög is, a fennmaradt két alakzat szögeinek összege

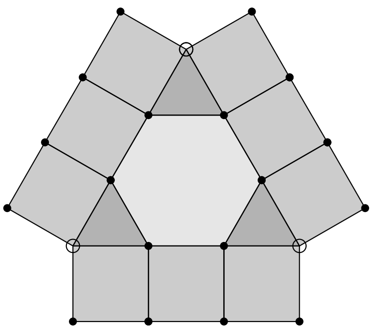
$$360^\circ - (60^\circ + 90^\circ + 120^\circ) = 90^\circ$$

és ez nem lehetséges.

Tehát egy csúcspontban csak négy alakzat találkozhat. A $(4, 3, 4, 6)$ elrendezés esetén lehet szabályos lefödést szerkeszteni, és ez a lefödés egyértelmű. Valóban, kiindulva a hatszög egyik $(4, 3, 4, 6)$ típusú csúcsából, ez a hatszög minden további csúcsát egyértelműen meghatározza (mind $(4, 3, 4, 6)$ típusúak lesznek). De így a kialakult tizenkétszög csúcsai is egyértelműen meghatározottak:

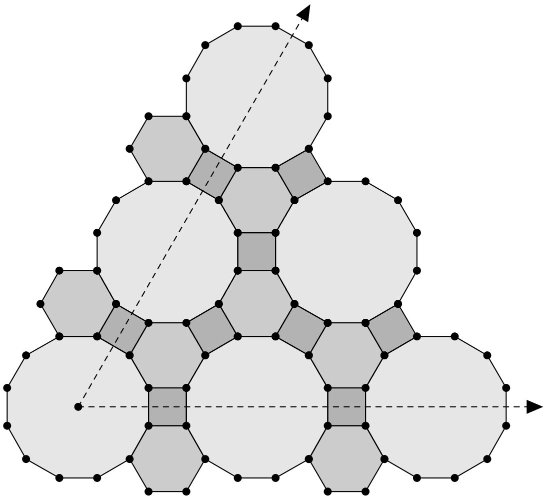


Ha a $(3, 4, 4, 6)$ csúcs körüli elrendezésből indulunk ki és egy hatszög csúcsait körbejárjuk, szükségszerűen az összes többi csúcs is $(3, 4, 4, 6)$ típusú lesz. Viszont így a felhasznált háromszögek harmadik csúcsai $(4, 3, 4, 6)$ típusúak lesznek:



Összegezve az eredményeket, egyedül a $(4,3,4,6)$ típusú lefödés ad szabályos lefödést.

Áttérünk a b) alpont megoldására. A következő ábrán látható lefödés szabályos, ha tizenkétszögekben, négyzetekben és hatszögekben gondolkodunk (minden csúcs $(4,6,12)$ típusú).



Viszont minden tizenkétszöget az a) alpont alapján egyértelműen háromszögekre, négyzetekre és hatszögekre bonthatunk. Ez a felbontás lehet olyan, hogy egy tizenkétszög belsejében elhelyezkedő négyzet egy kinti négyzettel csak csúcsban, vagy élben is érintkezzen. Ezt minden tizenkétszög esetén tetszőlegesen megválaszthatjuk, és ezért végtelen sok kért lefödést kapunk. Valóban, induljunk ki az egyetlen szabályos lefödésből és azonosítsunk be egy tizenkétszöget. Ezután, kúp alakban az ábra szerint haladva azonosítsunk be további tizenkétszögeket az előző ábra szerint (egy speciális „háromszögrácsot" kapunk, amelynek csúcsai a tizenkétszögek, és az őket összekötő alakzatok a négyzetek). Mindegyik kiválasztott tizenkétszög kétféle színezést határoz meg, de végtelen sok tizenkétszöget választottunk.