23. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Csíkszereda, 2014. március 12-16.

10. osztály

1. feladat: Oldd meg a prímszámok halmazán a

$$3x^2 - y^2 = 22y - 12x$$

egyenletet!

Olosz Ferenc (Szatmárnémeti)

1. megoldás: Az egyenletet rendezzük az ismeretlenek szerint és mindkét oldalt szorzattá alakítjuk:

$$3x(x+4) = y(y+22).$$

A bal oldal osztható 3-mal. Ha $y = 3$, akkor az $x^2 + 4x - 25 = 0$ egyenlethez jutunk és ennek nincs egész megoldása. Ha $x = y$, akkor $3x + 12 = x + 22$, ahonnan $x = y = 5$ prímszám, tehát megoldás. Az x és y prímszám volta miatt csak $3x \mid (y+22)$ és $y \mid (x+4)$ lehetséges. Ekkor $y \leq x + 4 \leq \frac{y+22}{3} + 4$ és kapjuk, hogy $y \leq 17$. Másrészt $3 \mid (y+22)$, így csak az

$$y \in \{2, 5, 11, 17\}$$

értékek lehetségesek. Ezeket kipróbálva, az $(5,5)$ és $(13,17)$ megoldásokhoz jutunk.

2. megoldás: $x = y$ esetén az egyenlet egyetlen megoldása $x = y = 5$. Ha $x \neq y$, akkor az egyenletet átírva, a $p \in \mathbb{N}$ változó bevezetésével írhatjuk, hogy

$$\frac{3(x+4)}{y} = \frac{y+22}{x} = p,$$

ahonnan

$$x = \frac{22p+12}{p^2-3} \text{ és } y = \frac{12p+66}{p^2-3}.$$

Itt $p = 3$ esetben megkapjuk az $x = 13, y = 17$ megfelelő megoldást, a többi p értékekre 1- től 16-ig nem kapunk jó megoldást. Ha $p \geq 17$, akkor már $y < 1$, ezért nincs több megoldás.

Megjegyzés: Az előbb kapott kifejezések $p \in \mathbb{Q}$ esetén az egyenlet végtelen sok racionális megoldását adják, közöttük végtelen sok egész megoldás is van.

---

2. feladat: Négy Tudós Matematikus egy egyenlő szárú trapéz alakú birtokon él, házaik a trapéz csúcsaira épültek. A trapéz hosszabb alapjának hossza a, az alapon fekvő szögek nagysága $50°$, az átlók által bezárt szög pedig $76°$. A Tudósok szeretik a szabályos dolgokat, így elhatározták, hogy olyan kutat építenek, amely mindannyiuk házától ugyanolyan távolságra helyezkedik el. Milyen távolságra kell építeniük házaiktól a kutat? Vajon a kút a birtokukon lesz-e?

dr. Péics Hajnalka (Szabadka)

Megoldás: Ahhoz, hogy minden háztól ugyanolyan távolságra legyen, a kutat a trapéz köré írt kör középpontjába kell elhelyezni.

Jelölje A, B, C, D a trapéz csúcspontjait, E a trapéz átlóinak metszéspontját, O pedig a trapéz köré írható körének középpontját. Legyen AB a trapéz hosszabb alapja. Tudjuk, hogy $CEB\sphericalangle$ vagy $AEB\sphericalangle$ $76°$-os. Az $AEB\sphericalangle$ azonban nem lehet $76°$, mert ellenkező esetben az $EAB\sphericalangle$ és $EBA\sphericalangle$ nagysága $52°$ lenne (az $ABE\Delta$ egyenlő szárú), ami nem lehetséges, mert ezek a szögek a trapéz alapon fekvő szögeinél, a $DAB\sphericalangle$-nél és $CBA\sphericalangle$-nél kisebbek, tehát $50°$-nál kisebbek kell legyenek. Eszerint $CEB\sphericalangle = 76°$, ahonnan $AEB\sphericalangle = 180° - 76° = 104°$, valamint $ABE\sphericalangle = \frac{180°-104°}{2} = 38°$. Továbbá az AB húr kerületi szöge

$$ADB\sphericalangle = 180° - (DAB\sphericalangle + ABE\sphericalangle) = 92°,$$

ami szerint az AB húr középponti szöge

$$AOB\sphericalangle = 2ADB\sphericalangle = 184° > 180°.$$

Ebből az következik, hogy a trapéz köré írt kör O középpontja a trapéz belső tartományán kívül esik. Ez azt jelenti, hogy a kutat nem lehet úgy megépíteni a Négy Tudós matematikus birtokára, hogy mindannyiuktól ugyanolyan távolságra legyen. Mivel $BAO\sphericalangle = 2°$ és $\cos 2° = \frac{\frac{a}{2}}{r}$, ahol r a trapéz köré írt kör sugara, következik, hogy $r = \frac{a}{2\cos 2°}$. Ez azt jelenti, hogy a kút minden háztól $r = \frac{a}{2\cos 2°}$ távolságra kell legyen.

Megjegyzés: Az $ABCD$ trapéz köré írható kör megegyezik az ABD háromszög köré írható körrel. A szinusz tétel alapján

$$\frac{AB}{\sin ADB\sphericalangle} = 2r,$$

ami az $\frac{a}{\sin 92°} = 2r$ egyenlőséghez vezet. Innen következik, hogy

$$r = \frac{a}{2\cos 2°}.$$

---

3. feladat: Oldd meg a pozitív valós számok halmazán a

$$2^{4x+1} + 2^{\frac{1}{2x^2}} = 12$$

egyenletet!

Koczinger Éva és Kovács Béla (Szatmárnémeti)

1. megoldás: Az egyenlet bal oldalát úgy alakítjuk, hogy alkalmazhassuk három pozitív szám számtani és mértani középarányosa közötti egyenlőtlenséget.

$$2^{4x+1} + 2^{\frac{1}{2x^2}} = 2\cdot 2^{4x} + 2^{\frac{1}{2x^2}} = 2^{4x} + 2^{4x} + 2^{\frac{1}{2x^2}} \geq$$

$$\geq 3\cdot\sqrt[3]{2^{4x+4x+\frac{1}{2x^2}}} = 3\cdot 2^{\frac{4x+4x+\frac{1}{2x^2}}{3}} \geq$$

$$\geq 3\cdot 2^{\sqrt[3]{4x\cdot 4x\cdot\frac{1}{2x^2}}} = 3\cdot 2^2 = 12$$

és ez pontosan az egyenlet jobb oldala. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a középarányosok közötti egyenlőtlenséget egyenlő számokra alkalmaztuk. Ezért $2^{4x} = 2^{\frac{1}{2x^2}}$, és így

$$4x = \frac{1}{2x^2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Ez valóban megoldása az adott egyenletnek.

2. megoldás: Átalakítjuk az egyenletet:

$$2^{4x}+2^{4x}+2^{\frac{1}{2x^2}}+2^2=2^4,$$

majd a bal oldalon kétszer alkalmazzuk a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget:

$$16=2^{4x}+2^{4x}+2^{\frac{1}{2x^2}}+2^2\geqslant 2\sqrt{2^{8x}}+2\sqrt{2^{\frac{1}{2x^2}+2}}\geqslant$$

$$\geqslant 4\sqrt[4]{2^{8x+\frac{1}{2x^2}+2}}=2^{\frac{8x+\frac{1}{2x^2}+2}{4}+2}=2^{\frac{8x+\frac{1}{2x^2}+10}{4}}.$$

Ez ekvivalens a

$$8x+\frac{1}{2x^2}+10\leqslant 16$$

egyenlőtlenséggel és ebből

$$\frac{16x^3-12x^2+1}{2x^2}\leqslant 0.$$

Tényezőkre bontva: $\frac{(2x-1)^2(4x+1)}{2x^2}\leqslant 0$. Ez csak akkor lehetséges, ha $x=\frac{1}{2}$. Ezt az értéket visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe, igaz egyenlőséghez jutunk, tehát $x=\frac{1}{2}$ az egyetlen pozitív megoldása az adott egyenletnek.

1. megjegyzés: A számolás közben a következő felbontást végeztük:

$$16x^3-12x^2+1=16x^3-2-12x^2+3=$$

$$=2\left(8x^3-1\right)-3\left(4x^2-1\right)=(2x-1)\left(8x^2+4x+2-6x-3\right)=$$

$$=(2x-1)\left(8x^2-2x-1\right)=(2x-1)^2(4x+1).$$

2. megjegyzés: Az egyenletnek van még egy negatív megoldása a

$$\left(-\frac{1}{2}\,,\,-\frac{1}{4}\right)$$

intervallumban, ami irracionális szám, közelítő értéke $-0,378$.

3. megjegyzés: Hasonlóan igazolható, hogy a

$$p^{p^2x+1}+p^{\frac{1}{p^{p-1}\cdot x^p}}=(p+1)p^p$$

egyenletnek ($p\in\mathbb{N}$, $p\geq 2$, $x>0$) az egyetlen megoldása $x=\dfrac{1}{p}$ és a

$$p\cdot a^{p^2x}+a^{\frac{1}{p^{p-1}x^p}}=(p+1)\cdot a^p$$

egyenlet ($a,p\in\mathbb{N}$ és $a,p\geq 2$, $x>0$) egyetlen megoldása $x=\dfrac{1}{p}$.

---

4. feladat: Adott az ABC háromszög, amelyben feltételezzük, hogy $AB<BC<AC$. A BC oldalon felvesszük a B' pontot úgy, hogy $CB'=AB$. Hasonlóan felvesszük az AC oldalon az A' és a C' pontot úgy, hogy $CA'=AB$ és $AC'=BC$. Jelöljük az AA', BB', illetve CC' szakaszok felezőpontját rendre D-vel, E-vel és F-fel. Bizonyítsd be, hogy ha A_1 a BC szakasz, B_1 az AC szakasz és C_1 az AB szakasz felezőpontja, valamint $\{G\}=A_1D\cap AB$, $\{H\}=B_1E\cap AB$ és $\{I\}=C_1F\cap BC$, akkor:

a) $BI = GH$;

b) az A_1D, C_1F és B_1E egyeneseknek van közös pontja;

c) ha J az ABC háromszögbe, K az $A_1B_1C_1$ háromszögbe írt kör középpontja, L pedig az ABC háromszög súlypontja, akkor a J, K és L pontok egy egyenesen helyezkednek el és $JL = 2KL$.

Pálhegyi Farkas László (Nagyvárad)

Megoldás: a) Használjuk a szokásos jelöléseket: $AB = c$, $BC = a$ és $AC = b$. Következik, hogy

$$AD = \frac{AC - AB}{2} = \frac{b-c}{2} \text{ és } DC = AC - AD = \frac{b+c}{2}.$$

Legyen $AG = x$. Alkalmazzuk Menelaosz tételét az ABC háromszög és GA_1 szelő esetén: mivel $\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BG}{GA} \cdot \frac{AD}{DC} = 1$, következik, hogy $\frac{c+x}{x} \cdot \frac{\frac{b-c}{2}}{\frac{b+c}{2}} = 1$, tehát $\frac{c+x}{x} = \frac{b+c}{b-c}$, innen pedig $x = \frac{b-c}{2}$. Hasonlóan alkalmazva Menelaosz tételét az ABC háromszög és B_1H, illetve C_1I szelők esetén, kapjuk, hogy $BH = \frac{a-c}{2}$ és $CI = \frac{b-a}{2}$. De $GH = GA + AB + BH = \frac{b-c}{2} + c + \frac{a-c}{2} = \frac{a+b}{2}$, illetve $BI = BC + CI = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$, tehát valóban $BI = GH$.

b) Mivel $AG = AD$, következik, hogy GD párhuzamos a $BAC\sphericalangle$ belső szögfelezőjével. De mivel $A_1B_1 \| AB$ és $A_1C_1 \| AC$, következik, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög szögeinek belső szögfelezői rendre: az A_1 szögnek A_1D, a B_1 szögnek B_1E és a C_1 szögnek C_1F. Ezeknek a szögfelezőknek van közös pontjuk.

c) Az ABC és az $A_1B_1C_1$ háromszögek hasonlóak, hasonlósági arányuk $\frac{1}{2}$ és AA_1 súlyvonal, amit az L ugyancsak $\frac{1}{2}$ arányban oszt. Ebből következik a kért állítás.

---

5. feladat: Bizonyítsd be, hogy az összes $\frac{1}{m \cdot n}$ alakú szám összege nem egész szám, ahol $1 \leq m < n \leq 2014$, illetve m és n természetes számok.

dr. Kántor Sándor (Debrecen)

Megoldás: Az 1-től 2014-ig terjedő egész számok között pontosan kettő (729 és 1458) osztható 3^6-nal, a többi 3-nak legfeljebb ötödik hatványával. Így az összes lehetséges $m \cdot n$ szorzat legfeljebb 3-nak 11-edik hatványával osztható, kivéve a $729 \cdot 1458 = 2 \cdot 3^{12}$ számot.

Adjuk össze $\dfrac{1}{729 \cdot 1458}$ kivételével az összes $\dfrac{1}{m \cdot n}$ alakú számot, és hozzuk őket közös nevezőre. Az eredmény $\dfrac{a}{3^{11} \cdot b}$ alakú tört, ahol a és b pozitív egész, b nem osztható 3-mal. Tehát $S = \dfrac{a}{3^{11} \cdot b} + \dfrac{1}{2 \cdot 3^{12}}$, és ezért $2 \cdot 3^{12} \cdot S \cdot b - 6a = b$.

Egész S esetén a bal oldal osztható lenne hárommal, míg a jobb oldal nem, tehát S nem lehet egész.

Megjegyzés: Megoldhatjuk a feladatot úgy is, hogy a 3^6 helyett egy tetszőleges, jól megválasztott p prímszámot használunk, amelyre $p \in (672, 1007)$. A prímszám megválasztásakor arra figyelünk, hogy a kétszerese legyen 2014-nél kisebb és a háromszorosa 2014-nél nagyobb. Az S összeget a fenti módszerrel $S = \frac{a}{pb} + \frac{1}{2p^2}$ alakba írjuk. Beszorozva a közös nevezővel, majd átrendezve az egyenlőséget, azt kapjuk, hogy $2p^2bS - 2pa = b$. Ennek a kifejezésnek a bal oldala osztható p-vel, a jobb oldala pedig nem. Tehát az S nem lehet egész szám.

---

6. feladat: a) Határozd meg a síknak egységoldalú szabályos hatszögekkel, egységoldalú négyzetekkel és egységoldalú szabályos tizenkétszögekkel való összes szabályos lefödését! Egy lefödés azt jelenti, hogy a sokszögek hézag és átfödés nélkül (egyrétűen) lefödik a síkot. A lefödés szabályos, ha léteznek olyan a, b, c nullától különböző természetes számok, amelyekre minden keletkező csúcs körül pontosan a darab hatszög, b darab négyzet és c darab tizenkétszög van, valamilyen rögzített sorrendben.

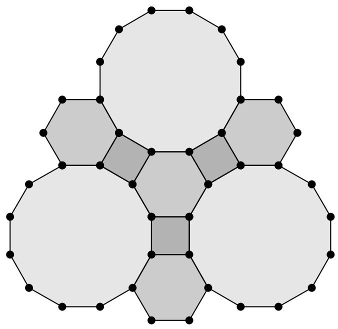
b) Bizonyítsd be, hogy az előbbi hatszögekkel, négyzetekkel, tizenkétszögekkel, valamint egységoldalú szabályos háromszögekkel létre lehet hozni olyan, nem feltétlenül szabályos lefödést, amelyben mind a négy típusú alakzatot végtelen sokszor használjuk, és amelyben létezik végtelen sok páronként különböző mintázat, amely véges sokszor jelenik meg! (Mintázat alatt a lefödés véges sok sokszöge által meghatározott összefüggő alakzatot értünk.)

Zsombori Gabriella (Csíkszereda)

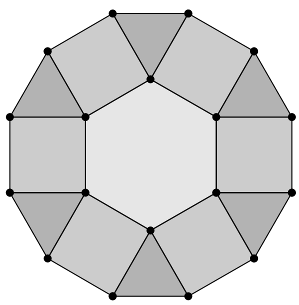
dr. András Szilárd, dr. Lukács Andor (Kolozsvár)

Megoldás: Javasoljuk elolvasni mind a négy évfolyam utolsó feladatának a megoldását az évfolyamok sorszámának növekvő sorrendjében.

a) Egy csúcs köré minden alakzatból kell kerüljön legalább egy. Mivel $120° + 90° + 150° = 360°$, ezért pontosan egy kell kerüljön mindegyikből. Következik, hogy minden csúcs szerkezete $(6, 4, 12)$ kell legyen. Egy ilyen csúcsból kiindulva, az összes többi egyértelműen meghatározott lesz és az egyetlen lefödés a következő:



b) A tizenkétszög felbontható háromszögekre, négyszögekre és hatszögekre a következő módon:



A megoldáshoz a továbbiakban használjuk a 11. osztály hatodik feladatának a megoldásához készített utolsó ábrát: a koordináta-rendszert, amelyben egy tizenkétszög középpontja az origó és két szomszédos vízszintes tizenkétszög középpontja között a távolság egy egység.

Megadunk egy lehetséges szerkesztést. Az összes olyan tizenkétszögre, amelyek középpontjának a koordinátái nem $(2^k, 2^k)$ alakúak ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$) használjuk az előző felbontást. Az így keletkezett síklefödés esetén végtelen sok olyan mintázat létezik, amelyik véges sokszor fordul csak elő: az összes olyan mintázat, amelyik pontosan két megmaradt, egymást követő tizenkétszöget és a köztük levő szabályos sokszögek által kitöltött alakzatot tartalmazza, csak egyszer fordul elő. Valóban, a szerkesztésünk következménye, hogy két ilyen tizenkétszög középpontjának a távolsága egyre nagyobb.