23. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Csíkszereda, 2014. március 12-16.

9. osztály

1. feladat: Egy könyvtárban megszámozták az összes könyvet. A számozáshoz 1-től kezdődően egymást követő természetes számokat használtak, és ugyanazt a számot nem írták rá két könyvre. A megszámozás során a könyvekre háromszor annyi számjegyet kellett ráírni, mint ahány könyv volt a könyvtárban. Hány könyv volt a könyvtárban?

Oláh György *(Révkomárom)*

1. megoldás: Legyen a keresett kötetek száma x. Ez a szám nem lehet egyjegyű, mert $x > 0$ esetén $x \neq 3x$. Ha x kétjegyű, akkor $9 + 2(x - 9) = 3x$, mert az egyjegyű számjegyek száma 9, a kétjegyű számok számjegyeinek száma pedig $2(x - 9)$. Ennek az egyenletnek nincs megoldása a természetes számok halmazán.

Ha x háromjegyű, akkor $9 + 2 \cdot 90 + 3(x - 99) = 3x$, és ennek az egyenletnek sincs megoldása.

Ha x négyjegyű, akkor az egyenlet:

$$9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + 4(x - 999) = 3x,$$

és ennek az egyetlen megoldása $x = 1107$.

Ha a kötetek száma $1107 + y$ is lehetne, ahol y pozitív egész, akkor a könyvek megjelölésére legalább $3 \cdot 1107 + 4y$ számjegyet kellene felhasználni. (Az első 1107 kötethez $3 \cdot 1107$ számjegyet és minden további kötethez legalább 4 számjegyet.) Másrészt $y > 0$ esetén $3 \cdot 1107 + 4y > 3(1107 + y)$, tehát 1107 az egyedüli megoldása a feladatnak.

2. megoldás: Legyen a keresett kötetek száma x. Jelöljük az x szám számjegyeinek számát $(k + 1)$-gyel. Ekkor az előbbiekben is felírtuk, hogy $k \geq 1$ (azaz a szám legalább kétjegyű kell legyen) és a számozás során felhasznált számjegyek száma:

$$9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + \ldots + k \cdot 9 \cdot 10^{k-1} + (k + 1)(x - 10^k + 1).$$

Az első összeget a következőképpen alakíthatjuk:

$$9\left(1 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 + \ldots + k \cdot 10^{k-1}\right) =$$

$$9\left[\left(1 + \ldots + 10^{k-1}\right) + 10\left(1 + \ldots + 10^{k-2}\right) + \ldots + 10^{k-1}\right] =$$

$$9\left[\frac{10^k - 1}{9} + 10 \cdot \frac{10^{k-1} - 1}{9} + \ldots + 10^{k-1} \cdot \frac{10 - 1}{9}\right] =$$

$$\left[\left(10^k - 1\right) + \left(10^k - 10\right) + \ldots + \left(10^k - 10^{k-1}\right)\right] =$$

$$k \cdot 10^k - \frac{10^k - 1}{9},$$

tehát a számjegyek száma

$$k + (k + 1)x - \frac{10^{k+1} - 10}{9}.$$

Így
$$3x = k + (k+1)x - \frac{10^{k+1} - 10}{9},$$
azaz
$$(k-2)x = \frac{10(10^k - 1)}{9} - k,$$
vagy
$$(k-2)x = \underbrace{111\ldots1}_{k \text{ darab}}0 - k.$$
A fenti összefüggés jobb oldala egy 1-gyel kezdődő $(k+1)$-jegyű szám. A bal oldalon ott van a $(k+1)$-jegyű x és így $k > 3$ esetén a baloldal nem lehet 1-gyel kezdődő $(k+1)$-jegyű szám. A $k = 3$ esetben pedig $x = 1107$.

---

2. feladat: Határozd meg az $(a+b)(b+c)(c+a) = 1144$ egyenlet összes nullától különböző természetes megoldását!

dr. Hraskó András (Budapest)

Megoldás: $1144 = 8 \cdot 11 \cdot 13$. Mivel az $(a+b)$, $(b+c)$, $(c+a)$ tényezők összege páros, ha közülük kettő páros, akkor a harmadik is az. Így vagy csak egyikük páros, vagy mind párosak.

Ha mind párosak, akkor legalább az egyik közülük 2, mert a prímtényezős felbontásban nincs három páratlan prím. Mivel 2 egyetlen felbontása pozitív egészek összegére az $1+1$, a szorzat további két tényezője egymással egyenlő lenne. Ez nem lehetséges, tehát ebben az esetben nincs megoldás.

Ha csak egyikük páros, akkor szükségképpen 8, 11 és 13 a három kéttagú összeg, tehát a számok valamilyen sorrendben 3, 5 és 8.

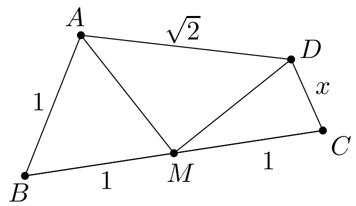
---

3. feladat: Az $ABCD$ konvex négyszögben $AB = 1$, $BC = 2$, $AD = \sqrt{2}$, $A\sphericalangle = 105°$ és $B\sphericalangle = 60°$. Számítsd ki a CD oldal hosszát!

Kovács Lajos (Székelyudvarhely)

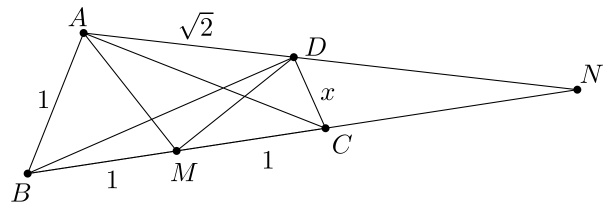
dr. András Szilárd (Kolozsvár)

1. megoldás: Jelöljük a DC oldal hosszát x-szel és a BC oldal felezőpontját M-mel.



A feltételek alapján $BM = MC = 1$, tehát az ABM háromszög egyenlő oldalú, és ezért $MAD\sphericalangle = 45°$. Az MAD háromszögben viszont $AD = \sqrt{2}$ és $AM = 1$ is teljesül, így az MAD háromszög M-ben derékszögű és egyenlő szárú, tehát $MD = 1$. Következik, hogy $DMC\sphericalangle = 180° - 60° - 90° = 30°$. Tehát a DMC háromszög egyenlő szárú, $DM = MC = 1$ és az M csúcsnál levő szög $30°$-os. Ha ebben a háromszögben felvesszük az M csúcsból kiinduló magasságot (ami egyben szögfelező és oldalfelező is), akkor következik, hogy
$$x = 2\sin 15° = 2\sqrt{\frac{1 - \cos 30°}{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

2. megoldás: Jelöljük a DC oldal hosszát x-szel, a BC oldal felezőpontját M-mel, és az AD és BC egyenesek metszéspontját N-nel.



Az előző megoldáshoz hasonlóan megkapjuk, hogy $BCD\sphericalangle = 75°$ és $CDA\sphericalangle = 75° + 45° = 120°$. Tehát az $ABCD$ négyszög szemközti szögeinek az összege $180°$ és így a négyszög körbeírható. A négyszög köré írt kör középpontja az M pont (és a kör sugara 1), ezért a $BAC\sphericalangle$ és $BDC\sphericalangle$ szögek $90°$-osak. Pitagorasz tétele alapján az

$$AC = \sqrt{3} \quad \text{és} \quad x^2 = 4 - BD^2 \tag{1}$$

összefüggéseket kapjuk.

Másrészt, $AMD\sphericalangle = 90°$, $BMA\sphericalangle = 60°$ és a BMD háromszög egyenlő szárú, tehát $MBD\sphericalangle = 15°$. Viszont az $ABCD$ négyszög körbeírható, ezért a $CAD\sphericalangle$ is $15°$. De az ANB háromszögben az $ANB\sphericalangle$ is $15°$-os így az ACN háromszög egyenlő szárú és

$$CN = AC = \sqrt{3} \tag{2}$$

az (1) összefüggés alapján.

Mivel a BDN háromszög is egyenlő szárú (a BN oldalon fekvő szögek $15°$-osak), ezért

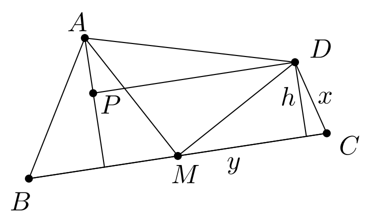
$$BD = DN = y. \tag{3}$$

Ha felírjuk az N pontnak az $ABCD$ négyszög köré írt körre vonatkozó hatványát (vagy direkt hasonlóságból), a (2) és (3) összefüggések alapján az

$$ND \cdot NA = NC \cdot NB \quad \Longleftrightarrow \quad y(y + \sqrt{2}) = \sqrt{3}(\sqrt{3} + 2)$$

összefüggéshez jutunk. Az y-ban másodfokú egyenletnek csak az egyik megoldása lesz pozitív (csak ez lehet egyenlő egy szakasz hosszával), és mivel $BD = y$, az (1) egyenletből megkapjuk az x értékét.

3. megoldás: Legyen a DC szakasz hossza x, a BC oldal felezőpontja M, a DCM háromszög D-ből húzott magasságának a hossza h és ez a magasság a CM szakaszt ossza y és $1 - y$ részekre (lásd az ábrát).



Az első megoldáshoz hasonlóan $DM = 1$ és ezért Pitagorasz tétele alapján a

$$h^2 + y^2 = 1 \quad \text{és} \quad h^2 + (1 - y)^2 = x^2 \tag{4}$$

egyenletekhez jutunk.

Szükségünk van még egy egyenletre, ezért rajzoljuk be az ABM egyenlő oldalú háromszögben az A csúcsból húzott magasságot (aminek a hossza $\frac{\sqrt{3}}{2}$), majd állítsunk a D pontból egy merőlegest erre a magasságra (és jelöljük ennek talppontját P-vel, lásd az ábrát). A harmadik egyenletünket az APD derékszögű háromszögben felírt Pitagorasz tételből kapjuk:

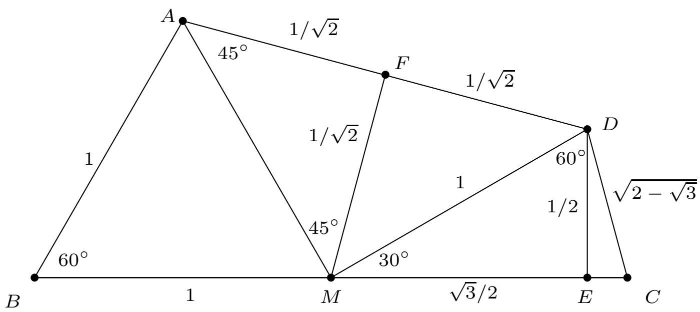
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-h\right)^2+\left(\frac{1}{2}+y\right)^2=(\sqrt{2})^2. \tag{5}$$

A fenti három egyenletből átalakításokkal a

$$\begin{aligned} 2-2y &= x^2, \\ h^2+y^2 &= 1, \\ \sqrt{3}h &= y \end{aligned}$$

egyenleteket kapjuk (a $h^2+y^2=1$ összefüggést használtuk a másik két egyenlet egyszerűsítésére, az utolsó egyenlet felírható a $30°$-os szög tangenséből is). Az utolsó két egyenletből következik, hogy $h=\frac{1}{2}$ és így $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$, tehát az első egyenletből következik, hogy $x=\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Megjegyzés: A mellékelt ábra alapján látható, hogy lépésről-lépésre csak a Pitagorasz tétel alkalmazásával is kiszámolható a kért szakasz hossza.



---

4. feladat: Hány valós megoldása van a $3\,[x]=2x^2+x-4$ egyenletnek? ($[x]$ az x valós szám egész részét jelenti.)

Szabó Magda (Szabadka)

Longáver Lajos (Nagybánya)

1. megoldás: Mivel $x-1<[x]\leq x$, a következő egyenlőtlenségekhez jutunk:

$$3\,(x-1)<2x^2+x-4\leq 3x.$$

Az így kapott egyenlőtlenségeket megoldjuk:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x^2-2x-1>0 \\ 2x^2-2x-4\leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x\in\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},+\infty\right) \\ x\in[-1,2] \end{array}\right.$$

Tehát $x\in\left[-1,\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},2\right]$ és így $[x]\in\{-1,1,2\}$.

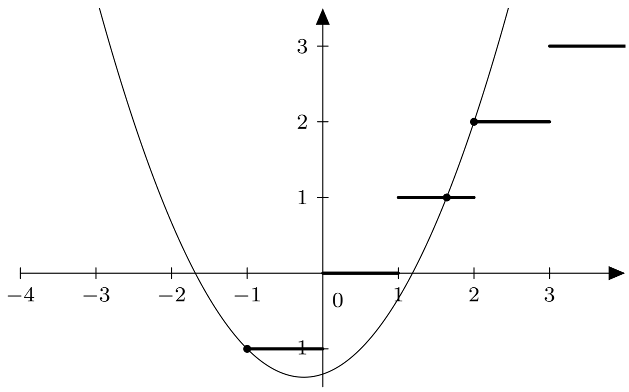
Ha $[x]=-1$, akkor a feladatbeli egyenlet $2x^2+x-1=0$, és ennek az egyetlen olyan megoldása, amelynek az egészrésze -1, az $x=-1$. (A másik megoldás $\frac{1}{2}$, ennek viszont az egészrésze 0.)

Ha $[x]=1$, akkor a feladatbeli egyenlet $2x^2+x-7=0$, és ennek az egyetlen olyan megoldása, amelynek az egészrésze 1, az a $x=\frac{-1+\sqrt{57}}{4}$. (A másik megoldás $\frac{-1-\sqrt{57}}{4}$.)

Ha $[x]=2$, akkor a feladatbeli egyenlet $2x^2+x-10=0$, és ennek az egyetlen olyan megoldása, amelynek az egészrésze 2, az $x=2$. (A másik megoldás $-\frac{5}{2}$.)

A fentieket összefoglalva, az egyenletnek összesen 3 megoldása van, ezek pedig a -1, $\frac{-1+\sqrt{57}}{4}$ és a 2.

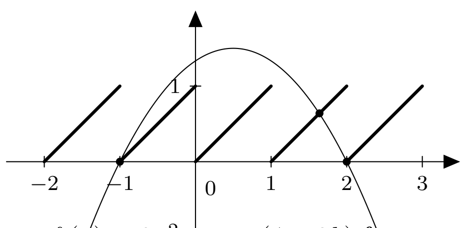
2. megoldás: Ábrázoljuk az $y=\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$ egyenletű parabolát, majd az $y=[x]$ függvény grafikus képét.



Az ábra alapján látható, hogy a megoldások $-1, 2$ és egy $(1,2)$ intervallumbeli szám. Mivel a feladat nem kéri konkrétan a megoldásokat, csak a megoldások számát, ezért ez elégséges is. Hasonló, de talán jobban látható gondolatmenethez jutunk, ha az egészrész függvény helyett a törtrész függvény grafikus képét ábrázoljuk. Ehhez átalakítjuk az egyenletet:

$$3\,[x]=2x^2+x-4 \Leftrightarrow 3\,(x-\{x\})=2x^2+x-4,$$

tehát a $\{x\}=-\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{3}$ egyenlethez jutunk. Ha ábrázoljuk az $y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$ egyenletű parabolát, majd az $y=\{x\}$ függvényt. Így sokkal jobban látszik a három megoldás.



3. megoldás: Tekintsük az $f(x)=2x^2+x-(4+3k)$ függvényt, ahol $k=[x]$.

Ha $x\leq-2$, akkor $f(x)=x(x+2)-(4+3k)>0$.

Az f függvény minden $x\in\left(0,-\frac{1}{4}\right)$ esetén szigorúan csökkenő, ha pedig $x\in\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$, akkor szigorúan növekvő.

Ha $x\in\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$, akkor - mivel szigorúan növekvő - f-nek minden $[k,k+1)$ intervallumban legfennebb egy gyöke van. Ez a gyök pontosan akkor létezik, ha $f(k)\leq 0$ és $f(k+1-\epsilon)>0$, ha ϵ elég kicsi. Ha $\epsilon\to 0$, akkor

$$f(k+1-\epsilon)\to 2\,(k+1)^2+(k+1)-(4+3k)=2k^2+2k-1$$

és ez nullánál szigorúan nagyobb kellene legyen.

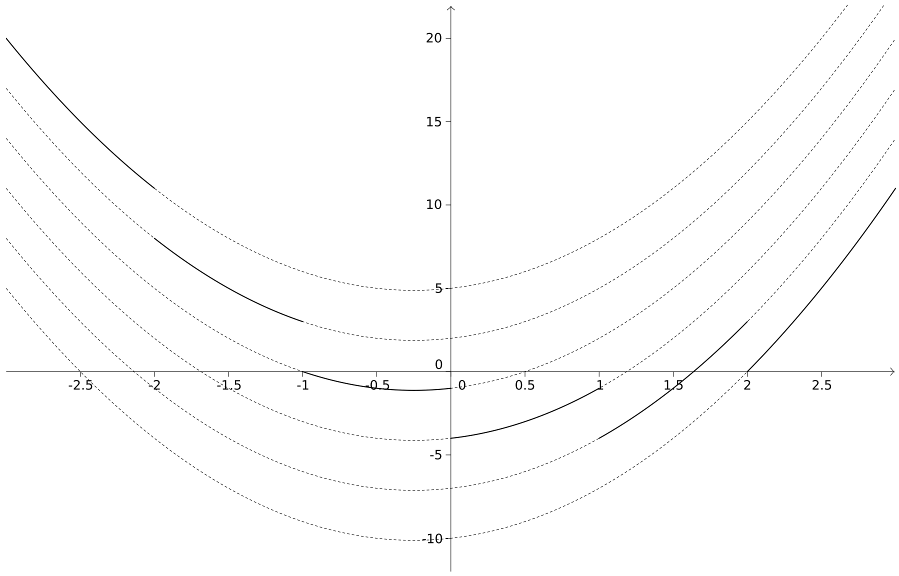
Az $f(k) \leq 0 \Leftrightarrow 2k^2 - 2k - 4 \leq 0 \Leftrightarrow k \in \{-1, 0, 1, 2\}$.
A $2k^2 + 2k - 1 > 0$ egyenlőtlenség viszont csak $k = 1$ és $k = 2$ esetén teljesül.

Ha $x \in \left(-2, -\frac{1}{4}\right)$, akkor $k \in \{-2, -1\}$ és f szigorúan csökkenő. A $k = -2$ és $k = -1$ értékeket egyszerű visszahelyettesítéssel ellenőrizhetjük. Az előzőekhez hasonlóan azt is ellenőrizhetjük, hogy a fordított egyenlőtlenségek teljesülnek-e, azaz:

$$\begin{cases} 2k^2 - 2k - 4 \geq 0 \\ 2k^2 + 2k - 1 < 0 \end{cases}.$$

Bármelyik úton is haladnánk tovább, közülük csak a $k = -1$ felel meg. Tehát három megoldás van.

Megjegyzés: Az f függvényt számítógép használata nélkül nagyon nehéz ábrázolni. Alább megtekinthető a grafikus képe.



---

5. feladat: Egy számítógép segítségével kinyomtatták a 2^{2014} és az 5^{2014} hatványok értékét tízes számrendszerben. Összesen hány számjegyet nyomtattak? (Pl. a 11231 szám kinyomtatásánál 5 számjegyet nyomtatnának.)

dr. Katz Sándor (Bonyhád)

Megoldás: Jelölje 2^{2014} jegyeinek számát k és 5^{2014} jegyeinek számát l. Ha az n természetes szám k jegyű, akkor $10^{k-1} \leq n < 10^k$, ezért

$$10^{k-1} \leq 2^{2014} < 10^k, \text{ illetve } 10^{l-1} \leq 5^{2014} < 10^l.$$

Mivel sem 2^{2014}, sem 5^{2014} nem lehet 10 hatvány, hiszen sem 2, sem 5 hatványai nem végződhetnek 0-ra, így egyik helyen sem állhat egyenlőség. Szorozzuk össze a két egyenlőtlenséget. Ezt megtehetjük, mert mindenhol pozitív számok állnak. Az előbbi észrevétel alapján mindkét egyenlőtlenség szigorú, tehát

$$10^{k+l-2} < 10^{2014} < 10^{k+l}.$$

A 10 hatványai a kitevő növekedésével növekednek, ezért az előbbiből következik, hogy

$$k + l - 2 < 2014 < k + l.$$

Mivel k és l egész számok, így ez csak $k + l = 2015$ esetén lehetséges. Tehát a két számnak összesen 2015 jegye van.

Megjegyzés: Az előbbiekhez hasonlóan belátható, hogy tetszőleges n pozitív egész szám esetén 2^n és 5^n számjegyei számának összege $n+1$. Ebből következik, hogy ha n értékét eggyel növeljük, akkor 2^n és 5^n közül mindig pontosan az egyiknél nő a jegyek száma.

---

6. feladat: a) Határozd meg a síknak egységoldalú szabályos háromszögekkel és egységoldalú szabályos hatszögekkel való összes szabályos lefödését! Egy lefödés azt jelenti, hogy a sokszögek hézag és átfödés nélkül (egyrétűen) lefödik a síkot. A lefödés szabályos, ha léteznek olyan a és b nullától különböző természetes számok, amelyekre minden keletkező csúcs körül pontosan a darab háromszög és b darab hatszög van, valamilyen rögzített sorrendben.

b) Bizonyítsd be, hogy van olyan, nem feltétlenül szabályos lefödés is (az előbbi háromszögekkel és hatszögekkel), amelyben létezik végtelen sok, páronként különböző mintázat, amely véges sokszor jelenik meg! (Mintázat alatt a lefödés véges sok sokszöge által meghatározott összefüggő alakzatot értünk.)

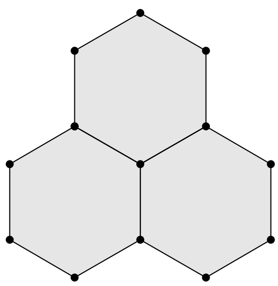
Zsombori Gabriella (Csíkszereda)

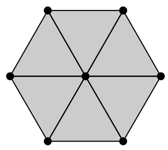
dr. András Szilárd, dr. Lukács Andor (Kolozsvár)

Megoldás: A szabályos háromszögnek egy szöge 60°-os, a szabályos hatszögnek pedig 120°. Egy csúcs körül az alakzatok szögeinek összege 360°, tehát egy csúcsban legalább három, de legfennebb hat alakzat találkozhat:

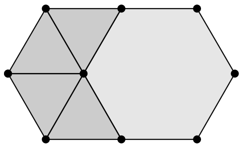
- ha három alakzat találkozna, akkor ezek mind hatszögek lennének, így nem tudnánk a szabályos lefödéshez háromszögeket használni:
- ha hat alakzat találkozna, akkor ezek mind háromszögek lennének, így a szabályos lefödéshez most nem tudnánk hatszöget használni:

Ezt a két esetet a következő ábrákon láthatjuk:

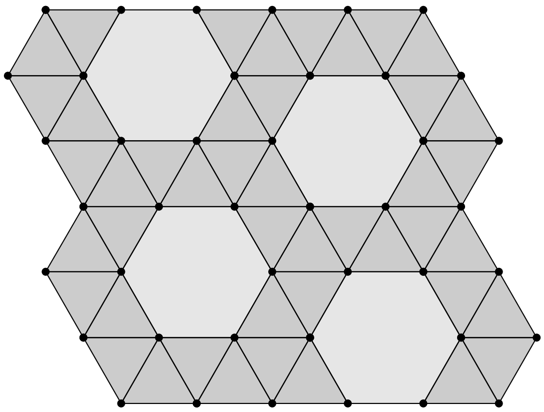




Ha egy csúcs körül csak egy hatszög lenne, akkor négy háromszög kell melléje ($1\cdot120° + 4\cdot60° = 360°$). Az egyszerűbb hivatkozás érdekében a lefedéshez hozzárendeljük a csúcsok körül megjelenő sokszögek oldalszámaiból képezett rendezett számhalmazt egy rögzített körüljárás szerint. Így az előbbi lefödéshez hozzárendelhetjük a $(6, 3, 3, 3, 3)$ rendezett szám ötöst. Egy ilyen csúcspont látható a következő ábrán:

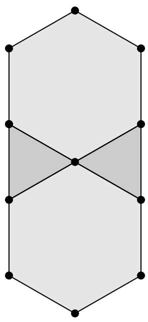


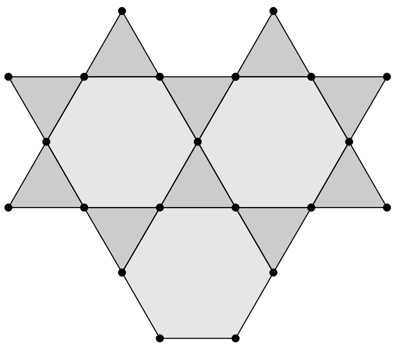
Szabályos lefödés csak a következő módon készíthető:



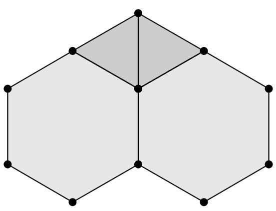
Ha egy csúcs körül két hatszög lenne, akkor két háromszög kell hozzá ($2 \cdot 120^\circ + 2 \cdot 60^\circ = 360^\circ$). Ez esetben kétféle csúcs lehetséges: $(6,3,6,3)$, illetve $(6,6,3,3)$.

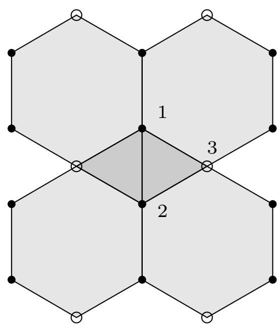
- A $(6,3,6,3)$ esetben egy csúcs körüli elhelyezés látható a bal oldalon, míg a szabályos lefödés a egy része jobb oldalon:





- A $(6,6,3,3)$ esetben egy csúcs körüli elhelyezést tüntettünk fel a következő bal oldali ábrán.



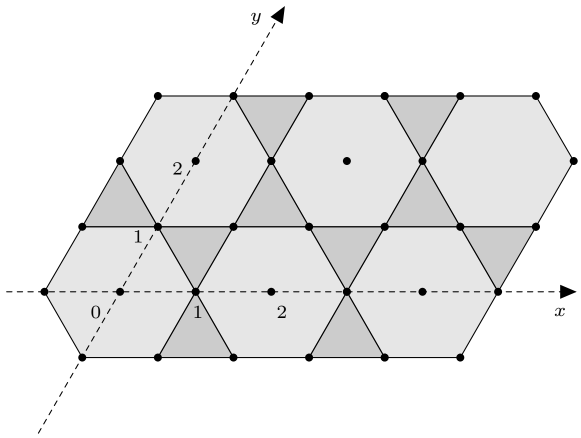


Ebben az esetben szabályos lefödés nem létezik, amit az előbbi ábra jobb oldala is bizonyít. Valóban, ha kiindulunk az 1-el jelölt $(6,6,3,3)$ típusú csúcsból, akkor a 2-es csúcs is szükségszerűen $(6,6,3,3)$ típusú lesz. Viszont ez azt jelenti, hogy a 3-as csúcs már csak $(6,3,6,3)$ típusú lehet. Ez a folyamat folytatódik, két fajta csúcsunk lesz: a teli csúcsok típusa az ábrán $(6,6,3,3)$, míg az üres csúcsok $(6,3,6,3)$ típusúak.

Áttérünk a b) alpont megoldására. Vegyük fel a következő ábrán látható szabályos lefödést és a hozzá tartozó, nem derékszögű koordináta-rendszert.

A lefödésben szereplő hatszögek középpontjainak a koordinátái $(2k,2l)$ alakúak, ahol $k,l\in\mathbb{Z}$.

Az összes olyan hatszöget, amely középpontjának a koordinátái nem $(2^k,2^k)$, $k\in\mathbb{N}, k\geq 1$ alakúak, cseréljük ki a hatszög egyértelmű háromszög-lefödésére.



Az így keletkezett síklefödés esetén végtelen sok olyan mintázat létezik, amelyik véges sokszor fordul csak elő: az összes olyan mintázat, amelyik tartalmaz két egymást követő megmaradt hatszöget és a köztük levő szabályos sokszögek által kitöltött alakzatot tartalmazza, csak egyszer fordul elő mert a két hatszög középpontja közti távolság csak egyszer fordul elő.

Megjegyzés: Javasoljuk elolvasni mind a négy évfolyam utolsó feladatának a megoldását az évfolyamok sorszámának növekvő sorrendjében.