XXII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Győr, 2013. március 14–18.

12. osztály

1. feladat: Határozza meg az összes k egész számot úgy, hogy az $E = k \cdot 3^{2013} - 2012$ osztható legyen 11-gyel.

Olosz Ferenc (Erdély)

2. feladat: Igazolja, hogy az $y = \frac{5}{3}x + 1$ egyenletű egyenestől minden rácspont (olyan pont, amelynek mindkét koordinátája egész szám) $\frac{1}{6}$-nál távolabb van.

Dr. Kántor Sándor (Magyarország)

3. feladat: Hány olyan háromszög van, amelynek oldalai centiméterben mérve egész számok és a területe 24 cm^2? Határozza meg ezeket a háromszögeket.

Kallós Béla (Magyarország)

4. feladat: A kúpba gömböt, majd ebbe a gömbbe kúpot szerkesztünk, amely hasonló az elsőhöz, a tengelyes metszetek szárszögei egyenlők, a nagyobb kúp térfogata 27-szer nagyobb a kisebb kúp térfogatánál. Határozza meg a kisebb kúp magasságának és sugarának az arányát.

R. Sipos Elvira (Délvidék)

5. feladat: Van n városunk (n egynél nagyobb egész szám) úgy, hogy közülük bármely kettőt egyirányú vasútvonal köt össze. Bizonyítsa be, hogy a városok közt van olyan, ahonnan bármelyik városba legfeljebb egy átszállással (ezen a vasúthálózaton) el lehet jutni.

Dr. Kántor Sándor (Magyarország)

6. feladat: Legyen x_1 pozitív, 1-nél kisebb szám. Képezzük az

$$x_{k+1} = x_k - x_k^2 \quad (k = 1, 2, \ldots) \text{ sorozatot.}$$

Bizonyítsa, hogy minden pozitív n egész számra

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < \frac{2014}{2013}.$$

Oláh György (Felvidék)