XXII. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Győr, 2013. március 14–18.

12. osztály

1. feladat: Határozza meg az összes k egész számot úgy, hogy az $E = k \cdot 3^{2013} - 2012$ osztható legyen 11-gyel.

Olosz Ferenc (Erdély)

Megoldás: A feladat többféleképpen is megoldható. Az egyik lehetséges megoldási mód a következő:
$3^5 = 243 = 22 \cdot 11 + 1$, ezért jó lenne, ha az E-ben a 3^{2013} helyett 3^{2015} szerepelne. Mivel 9 és 11 relatív prímek, ezért az E-nek 11-gyel való oszthatósága helyett tanulmányozhatjuk a $9E$-nek a 11-gyel való oszthatóságát.

$$9E = k \cdot 3^{2015} - 9 \cdot 2012 = k \cdot \left(3^5\right)^{403} - 18108 = k \cdot (22 \cdot 11 + 1)^{403} - (1646 \cdot 11 + 2)$$

A binomiális képlet alapján $(22 \cdot 11 + 1)^{403} = 11 \cdot k_1 + 1$, ahol $k_1 \in \mathbb{Z}$.
(Aki nem ismeri e képletet, az teljes indukcióval bizonyíthatja a fenti összefüggést.)

$$9E = k(11 \cdot k_1 + 1) - (1646 \cdot 11 + 2) = (k \cdot k_1 - 1646) \cdot 11 + k - 2$$

$9E$ akkor és csak akkor osztható 11-gyel, ha $k-2$ osztható 11-gyel, vagyis $k-2 = 11 \cdot m, m \in \mathbb{Z}$.
Tehát $E = k \cdot 3^{2013} - 2012$ akkor és csak akkor osztható 11-gyel, ha k olyan egész szám, amelynek 11-gyel való osztási maradéka 2, vagyis $k = 11 \cdot m - 2$, ahol m tetszőleges egész szám.

---

2. feladat: Igazolja, hogy az $y = \dfrac{5}{3}x + 1$ egyenletű egyenestől minden rácspont (olyan pont, amelynek mindkét koordinátája egész szám) $\dfrac{1}{6}$-nál távolabb van.

Dr. Kántor Sándor (Magyarország)

Megoldás: Az $y = \frac{5}{3}x + 1$ egyenletű egyenes áthalad például az $(x; y) = (0; 1), (3; 6)$ rácspontokon $(3; 5)$ irányvektorral. Ebben az irányban nincs rövidebb rácsvektor, mert 3-nak és 5-nek nincs 1-nél nagyobb közös osztója.

A párhuzamos rácsegyenesek távolságát abból az elvből határozhatjuk meg, hogy az üres rácsparalelogramma területe 1. (Ezt tényleg ismertnek tekintjük!)

A fenti legrövidebb rácsvektor hossza $\sqrt{34}$, ezért a rácsegyenesek távolsága $\frac{1}{\sqrt{34}}$ (az alap $\cdot$ magasság területképlet miatt).

Az $\frac{1}{\sqrt{34}} > \frac{1}{6}$ egyenlőtlenségből következik a feladat állítása.

---

3. feladat: Hány olyan háromszög van, amelynek oldalai centiméterben mérve egész számok és a területe 24 cm^2? Határozza meg ezeket a háromszögeket.

Kallós Béla (Magyarország)

Megoldás: Jelöljük a háromszög oldalait a, b, c-vel, a félkerületét s-sel. Ekkor felírható (Héron-képlet), hogy $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 24$, azaz

$$s(s-a)(s-b)(s-c) = 2^6 \cdot 3^2 = 576.$$

Itt s értéke biztosan egész, ugyanis nem egész esetén a törtrésze 0,5 lenne, de ekkor az $s(s-a)(s-b)(s-c)$ szorzat nem lenne 576, azaz egész. A baloldalon az utolsó három tényező összege egyenlő az első tényezővel, ugyanis $s-a+s-b+s-c = 3s-2s = s$. Mivel $s > s-a$; $s > s-b$; és $s > s-c$, ezért végezzünk egy becslést számtani-mértani egyenlőtlenség segítségével az s értékére:

$$\begin{aligned}
\sqrt[4]{s(s-a)(s-b)(s-c)} &\leq \frac{s+(s-a)+(s-b)+(s-c)}{4} = \frac{s}{2} \\
\sqrt[4]{576} &\leq \frac{s}{2} \\
2\sqrt{24} &\leq s \\
10 &\leq s
\end{aligned}$$

Ezért az 576-ot úgy kell felbontani négy tényező szorzatára, hogy három tényező összege a negyedikkel legyen egyenlő, ami viszont 10-nél nem kisebb. Az 576 szóba jöhető osztópárjai (amit tovább kell bontani): $1 \cdot 576$, $2 \cdot 288$, $3 \cdot 192$, $4 \cdot 144$, $6 \cdot 96$, $8 \cdot 72$, $9 \cdot 64$, $12 \cdot 48$, $16 \cdot 36$, $18 \cdot 32$, $24 \cdot 24$.

Ezek közül csak a $18 \cdot 32$ és a $16 \cdot 36$ írható fel a megfelelő négytényezős szorzatként:

1. eset: $12 \cdot 48 = 12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$, ahol $s = 12$, $s-a = 6$, $s-b = 4$, $s-c = 2$, azaz a háromszög oldalai 6 cm, 8 cm és 10 cm.

2. eset: $16 \cdot 36 = 16 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 1$, ahol $s = 16$, $s-a = 12$, $s-b = 3$, $s-c = 1$, azaz a háromszög oldalai 4 cm, 13 cm és 151cm.

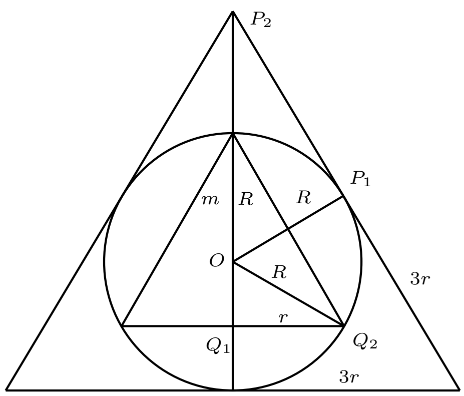
Tehát két megfelelő háromszög létezik.

---

4. feladat: A kúpba gömböt, majd ebbe a gömbbe kúpot szerkesztünk, amely hasonló az elsőhöz, a tengelyes metszetek szárszögei egyenlők, a nagyobb kúp térfogata 27-szer nagyobb a kisebb kúp térfogatánál. Határozza meg a kisebb kúp magasságának és sugarának az arányát.

R. Sipos Elvira (Délvidék)

Megoldás: $\frac{V_1}{V_2} = 27 \Rightarrow \lambda = 3$. Az alábbi ábra jelöléseit használjuk:



OQ_1Q_2 háromszögben:

$$\begin{aligned} r^2+(m-R)^2 &= R^2 \\ r^2+m^2-2mR+R^2 &= R^2 \\ r^2+m^2 &= 2mR \end{aligned}$$

OP_1P_2 háromszögben:

$$\sqrt{(3r)^2+(3m)^2}-3r = 3\left(\sqrt{r^2+m^2}-r\right)$$

Így Pitagorasz-tétellel:

$$\begin{aligned} (3m-R)^2 &= R^2+9\left(\sqrt{r^2+m^2}-r\right)^2 \\ 9m^2-6mR &= 9\left((r^2+m^2)-2r\sqrt{r^2+m^2}+r^2\right) \\ -3r^2-3m^2 &= 18r^2-18r\sqrt{r^2+m^2} \\ 18r\sqrt{r^2+m^2} &= 21r^2+3m^2 \\ 6r\sqrt{r^2+m^2} &= 7r^2+m^2 \\ 36r^2(r^2+m^2) &= 49r^4+14m^2r^2+m^4 \\ 0 &= m^4+22m^2r^2+13r^4 \\ \left(\frac{m^2}{r^2}\right)^2-22\left(\frac{m^2}{r^2}\right)+13 &= 0 \end{aligned}$$

Megoldóképlettel:

$$\frac{m^2}{r^2} = 11 \pm 6\sqrt{3}$$

$$\frac{m}{r} = \sqrt{11+6\sqrt{3}} \text{ illetve } \frac{m}{r} = \sqrt{11-6\sqrt{3}}$$

Mind a kettő jó!

---

5. feladat: Van n városunk (n egynél nagyobb egész szám) úgy, hogy közülük bármely kettőt egyirányú vasútvonal köt össze. Bizonyítsa be, hogy a városok közt van olyan, ahonnan bármelyik városba legfeljebb egy átszállással (ezen a vasúthálózaton) el lehet jutni.

Dr. Kántor Sándor (Magyarország)

I. megoldás: Legyen k az a legnagyobb pozitív egész szám, amelyre igaz, hogy van olyan város, amelyből k városba el lehet jutni közvetlenül (átszállás nélkül). Legyen A olyan város (vagy ha több ilyen is létezik, akkor közülük egy), amelyből az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ (különböző) városokba közvetlenül el lehet jutni.

Ha az összes város A_i-k között van, akkor innen minden város közvetlenül elérhető.

Ellenkező esetben vegyünk egy tetszőleges, eddig kimaradó várost, legyen ez B. A-ból B-be nem lehet eljutni, hanem fordítva csak, A meghatározása miatt. Ha az összes A_i-be B-ből vezetne út, akkor B-ből $k+1$ út vezetne ki, ez a kezdeti feltételünknek ellent mondana, tehát valamelyik A_i-ből vezet út B-be, tehát B is 1 átszállással elérhető A-ból.

Ez a gondolat az összes, A_i-k között nem szereplő városra igaz, tehát készen vagyunk.

II. megoldás: Bizonyítsunk teljes indukcióval. $n = 2, 3$-ra könnyű látni, hogy igaz az állítás.

Tegyük fel, hogy n-re is igaz (n-ig minden esetre igaz). Nézzük az $n+1$-es esetet. Tekintsünk elsőre csak n várost, erre igaz a feltétel. Vagyis jelöljük A-val azt a várost, ahonnan minden további elérhető direkt vagy 1 átszállással. A direkt elérhető városok legyenek $D_1, D_2, \ldots, D_k$, a többiek (maradék) innen már direkt elérhető.

Most tegyük be az $n+1$-edik várost és nézzük, hogy hogyan kapcsolódik A-hoz és a D_i városokhoz. Ha innen ezek közvetlenül elérhetők, akkor innen minden elérhető a feladat szerint.

Ha csak 1 is olyan, hogy innen nem érhető el, akkor továbbra is az A a jó város, hiszen vagy legújabb vagy közvetlenül (A-ból), vagy valamelyik D_i-n keresztül (1 átszállással) elérhető.

---

6. feladat: Legyen x_1 pozitív, 1-nél kisebb szám. Képezzük az

$$x_{k+1} = x_k - x_k^2 \quad (k = 1, 2, \ldots) \text{ sorozatot.}$$

Bizonyítsa, hogy minden pozitív n egész számra

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < \frac{2014}{2013}.$$

Oláh György (Felvidék)

Megoldás: $x_{k+1} = x_k - x_k^2$ átrendezésével $x_k^2 = x_k - x_{k+1}$.
Írjuk fel ezt $k = 1, 2, \ldots, n$-re,

$$\begin{aligned} x_1^2 &= x_1 - x_2 \\ x_2^2 &= x_2 - x_3 \\ &\ldots \\ x_n^2 &= x_n - x_{n+1}, \end{aligned}$$

majd adjuk össze a fent felírt egyenleteket:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = x_1 - x_{n+1} < x_1 < 1 < \frac{2014}{2013}.$$

Ugyanis a sorozat minden eleme, így x_{n+1} is pozitív. Valóban $0 < x_1 < 1$ miatt $x_2 = x_1(1-x_1)$ is 0 és 1 között van, és lépésről lépésre látható ugyanez a sorozat többi elemére is.