XXII. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Győr, 2013. március 14–18.

11. osztály

1. feladat: Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$x + \frac{x}{x-1} + \frac{x^2}{x^2-x+1} = \frac{49}{6}$$

Kovács Béla (Erdély)

2. feladat: Az x, y, z valós számok eleget tesznek az

$$x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$$

egyenletnek. Mekkora lehet a $2x + y - z$ kifejezés legnagyobb értéke és mely x, y, z számokra veszi ezt fel?

Pintér Ferenc (Magyarország)

3. feladat: Mutassa meg, hogy a következő egyenletnek nincs megoldása az $(x; y)$ pozitív egész számpárok halmazán:

$$(3x + 3y)^2 + 12x + 12y = 8048 + (x - y)^2.$$

Nemecskó István (Magyarország)

4. feladat: Tekintsünk egy 5×5-ös méretű „sakktáblát”. Jelentse az adott sakktábla egy kitöltését az az eljárás, melynek során minden mezőbe beírunk pontosan egyet az 1, 2, 3, ... 25 számok közül. Adja meg a fenti sakktáblának egy olyan kitöltését, melyben a számok soronkénti összegeinek szorzata a lehető legnagyobb.

Bíró Béla (Erdély)

5. feladat: Legyen az ABC háromszög AB oldalának belső pontja P. Az AC egyenest az A pontban érintő, illetve a BC egyenest a B pontban érintő körök metszéspontjai a P és Q pontok. Bizonyítsa, hogy a C pontnak az AB szakasz felezőmerőlegesére vonatkozó tükörképe illeszkedik a PQ egyenesre!

Bíró Bálint (Magyarország)

6. feladat: Jelöljük az ABC háromszög szögeit α, β, γ-val, az említett szögekkel szemközti oldalakat pedig rendre a, b, c-vel. Bizonyítsa be, hogy $b < \frac{1}{2}(a + c)$ esetén $\beta < \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$.

Fonyó Lajos (Magyarország)