XXII. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Győr, 2013. március 14–18.

11. osztály

1. feladat: Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$x + \frac{x}{x-1} + \frac{x^2}{x^2 - x + 1} = \frac{49}{6}$$

Kovács Béla (Erdély)

I. megoldás: Az egyenlet értelmezési tartománya az $\mathbb{R} \setminus 1$ halmaz; $x^2 - x + 1 > 0$ minden valós x-re.

Legyen $x + \frac{x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1} = t$. Az új ismeretlennel felírhatjuk a harmadik tagot is:

$$\frac{x^2}{x^2 - x + 1} = \frac{\frac{x^2}{x-1}}{\frac{x^2}{x-1} - 1} = \frac{t}{t-1}.$$

Így az egyenlet:

$$t + \frac{t}{t-1} = \frac{49}{6}.$$

Felszorzunk és rendezünk.

$$6t^2 - 49t + 49 = 0$$

A másodfokú egyenlet gyökei $t_1 = 7$ és $t_2 = \frac{7}{6}$.

Visszatérünk a helyettesítéshez.

$$t_1 = \frac{x^2}{x-1} = 7 \implies x^2 - 7x + 7 = 0$$

Ezen másodfokú egyenlet gyökei

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

$$t_2 = \frac{x^2}{x-1} = \frac{7}{6} \implies 6x^2 - 7x + 7 = 0$$

Ez utóbbi másodfokú egyenletnek nincs valós gyöke.

Tehát az eredeti egyenlet valós megoldásai:

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

II. megoldás: Közös nevezőre való hozással és átalakításokkal rendezve az egyenlet:

$$x^4 - 49x^3 + 98x^2 - 98x + 49 = 0.$$

Szorzattá alakíthatunk:

$$\left(x^2 - 7x + 7\right)\left(6x^2 - 7x + 7\right) = 0.$$

Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla – a két másodfokú egyenlet megoldása után kapjuk az eredeti egyenlet gyökeit.

---

2. feladat: Az x, y, z valós számok eleget tesznek az

$$x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$$

egyenletnek. Mekkora lehet a $2x + y - z$ kifejezés legnagyobb értéke és mely x, y, z számokra veszi ezt fel?

Pintér Ferenc (Magyarország)

I. megoldás: Legyen $2x + y - z = t$, ahonnan $z = 2x + y - t$, melyet helyettesítsünk be a feltétel egyenletébe. Ekkor a következőhöz jutunk:

$$x^2 + 3y^2 + (2x + y - t)^2 = 2.$$

Végezzük el a műveleteket és rendezzünk x hatványai szerint.

$$5x^2 + 4(y - t)x + 4y^2 - 2ty + t^2 - 2 = 0$$

Ez x-ben másodfokú egyenlet – x-re valós gyököt csak akkor kaphatunk, ha az egyenlet diszkriminánsa nemnegatív.

$$\begin{aligned}
D = 16(y-t)^2 - 4 \cdot 5\left(4y^2 - 2ty + t^2 - 2\right) &\geq 0 \\
4(y-t)^2 - 5\left(4y^2 - 2ty + t^2 - 2\right) &\geq 0 \\
4y^2 - 8ty + 4t^2 - 20y^2 + 10ty - 5t^2 + 10 &\geq 0 \\
0 &\geq 16y^2 - 2ty + t^2 - 10
\end{aligned}$$

Ennek az egyenlőtlenségnek akkor van megoldása, ha bal oldalon álló y-ban másodfokú kifejezésnek van zérushelye, vagyis ha a diszkriminánsa nem kisebb nullánál:

$$\begin{aligned}
4t^2 - 4 \cdot 16 \cdot \left(t^2 - 10\right) &\geq 0 \\
t^2 - 16t^2 + 160 &\geq 0 \\
160 &\geq 15t^2 \\
\frac{32}{3} &\geq t^2
\end{aligned}$$

Ebből az egyenlőtlenségből megkapjuk t legnagyobb értékét:

$$t_{\max} = \sqrt{\frac{32}{3}}.$$

Innen az előző egyenlőtlenségekben mindenütt egyenlőséget írva és behelyettesítve t maximális értékét, visszafelé haladva kapjuk y, x és z azon értékét, ahol t felveszi maximumát:

$$x = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad y = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad z = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Ezen értékek valóban kielégítik az eredeti feltételt:

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = \frac{3}{2} + 3\cdot\frac{1}{36}\cdot\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2} = 2.$$

II. megoldás: Legyen $2x + y - z = t$, és ennek valamilyen pozitív α-szorosát vonjuk ki a feltétel egyenletéből, majd rendezzünk.

$$\begin{aligned} x^2 + 3y^2 - z^2 - 2\alpha x - \alpha y + \alpha z &= 2 - \alpha t \\ (x-\alpha)^2 - \alpha^2 + \left(\sqrt{3}y - \frac{\alpha}{2\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{12} + \left(z + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4} &= 2 - \alpha t \\ (x-\alpha)^2 + \left(\sqrt{3}y - \frac{\alpha}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(z + \frac{\alpha}{2}\right)^2 &= 2 - \alpha t + \frac{4}{3}\alpha^2 \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy a bal oldal nemnegatív, így a jobb oldal is az. Mivel célunk t maximalizálása, ez azt jelenti, hogy mindkét oldal 0. Ekkor

$$0 = 2 - \alpha t + \frac{4}{3}\alpha^2 \iff t = \frac{2}{\alpha} + \frac{4}{3}\alpha,$$

felhasználva, hogy α pozitív. A bal oldal pontosan akkor nulla, ha minden tag nulla. Ez akkor teljesül, ha

$$x = \alpha, \quad y = \frac{\alpha}{6}, \quad z = -\frac{\alpha}{2}.$$

Az x-re, y-ra és z-re kapott értékeket visszaírva a feltételbe megkapjuk a maximális t-hez tartozó α értékét.

$$\begin{aligned} \alpha^2 + 3\left(\frac{\alpha}{6}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 &= 2 \\ \alpha^2 + \frac{\alpha^2}{12} + \frac{\alpha^2}{4} &= 2 \\ \frac{4}{3}\alpha^2 &= 2 \\ \alpha &= \sqrt{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Válasszuk meg tehát így α-t. A fenti levezetésből már kiderül, hogy t akkor veszi fel maximális értékét, ha

$$x = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad y = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad z = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

A maximális érték tehát

$$t_{\max} = \frac{2}{\alpha} + \frac{4}{3}\alpha = \sqrt{\frac{32}{3}}.$$

III. megoldás: Tekintsük az $\mathbf{u}\left(x; \sqrt{3}y; z\right)$ és $\mathbf{v}\left(2; \frac{1}{\sqrt{3}}; -1\right)$ vektorokat, az általuk bezárt szög legyen φ.

A vektorok abszolút értékei

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{x^2 + 3y^2 + z^2} = \sqrt{2} \quad \text{és} \quad |\mathbf{v}|\sqrt{4 + \frac{1}{3} + 1} = \frac{4}{\sqrt{3}},$$

skaláris szorzatuk

$$\mathbf{uv} = 2x + y - z.$$

A Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség szerint $\mathbf{uv} \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$, és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha a két vektor lineárisan összefüggő, azaz ha $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$, tehát

$$x = 2\lambda, \quad y = \frac{\lambda}{3}, \quad z = -\lambda.$$

Így kifejezhetjük x-szel a másik két változót: $y = \frac{1}{6}x$, $z = -\frac{1}{2}x$. Ezt visszaírva a feltételbe megkapjuk x értékét.

$$\begin{aligned} x^2 + 3\left(\frac{x}{6}\right)^2 + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 &= 2 \\ x^2 + \frac{x^2}{12} + \frac{x^2}{4} &= 2 \\ \frac{4x^2}{3} &= 2 \\ x^2 &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$x = \sqrt{\frac{3}{2}}$-re $y = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}}$ és $z = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$; $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$-re $y = -\frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}}$ és $z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$ – utóbbi esetben $2x + y - z$ negatív, így ez nem ad maximumot. Az előbbi esetben

$$2x + y - z = 2\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{32}{3}},$$

ami valóban $|\mathbf{u}|$ és $|\mathbf{v}|$ szorzata. A kifejezés legnagyobb értéke tehát $\sqrt{\frac{32}{3}}$, amit a megadott x, y, z értékekre fel is vesz.

---

3. feladat: Mutassa meg, hogy a következő egyenletnek nincs megoldása az $(x; y)$ pozitív egész számpárok halmazán:

$$(3x + 3y)^2 + 12x + 12y = 8048 + (x - y)^2.$$

Nemecskó István (Magyarország)

Megoldás: Mindkét oldalhoz 4-et adunk és rendezünk:

$$\begin{aligned} (3x + 3y)^2 + 4(3x + 3y) + 4 - (x - y)^2 &= 8052 \\ (3x + 3y + 2)^2 - (x - y)^2 &= 8052 \\ (2x + y + 1)(x + 2y + 1) &= 2013 \end{aligned}$$

Ha x és y pozitív egész számok, akkor a zárójelben álló kifejezések is azok. Felírjuk 2013 prímtényezős felbontását:

$$(2x + y + 1)(x + 2y + 1) = 3 \cdot 11 \cdot 61$$

Legyen tehát

$$2x + y + 1 = d_1,$$
$$x + 2y + 1 = d_2,$$

ahol $d_1 \cdot d_2 = 2013$.

Kifejezzük x-et és y-t:

$$3y = 2d_2 - d_1 - 1,$$
$$3x = 2d_1 - d_2 - 1.$$

x és y szerepe szimmetrikus, így feltehetjük, hogy $d_1 > d_2$ ($d_1 \neq d_2$, mert 2013 nem négyzetszám).

A lehetséges felbontásokat a táblázat mutatja: az első három esetben y jól láthatóan negatív lesz, a negyedik esetben pedig nem egész szám:

d_1	d_2	y
2013	1	negatív
671	3	negatív
183	11	negatív
61	33	$\frac{2 \cdot 33 - 61 - 1}{3} = \frac{4}{3}$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy az egyenletnek nincs megoldása a pozitív egész számpárok halmazán.

Megjegyzés: az egészek halmazán az egyenletnek nyolc megoldása van:

$$(-1342; 670), \quad (-222; 446), \quad (-54; 118), \quad (-30; -2),$$
$$(670; -1342), \quad (446; -222), \quad (118; -54), \quad (-2; -30).$$

---

4. feladat: Tekintsünk egy 5×5-ös méretű „sakktáblát”. Jelentse az adott sakktábla egy kitöltését az az eljárás, melynek során minden mezőbe beírunk pontosan egyet az 1, 2, 3, ... 25 számok közül. Adja meg a fenti sakktáblának egy olyan kitöltését, melyben a számok soronkénti összegeinek szorzata a lehető legnagyobb.

Bíró Béla (Erdély)

Megoldás: A feladatban megfogalmazott feltételek mellett az adott sakktáblát véges sokféleképpen tölthetjük ki (összesen 25!-féle kitöltés van, ha a szimmetrikus kitöltéseket nem tekintjük azonosnak). Minden kitöltéshez tartozik a soronkénti számok összegeinek egy-egy szorzata. Tehát ezen szorzatszámok halmaza is véges, ezért van közöttük legnagyobb.

Jelöljük a soronkénti számok változó összegszámait a, b, c, d, e-vel. A számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség felhasználásával írhatjuk, hogy:

$$abcde \leq \left(\frac{a+b+c+d+e}{5}\right)^5 = \left(\frac{325}{5}\right)^5 = 65^5,$$

mert $a + b + c + d + e = 1 + 2 + \ldots + 25 = 325$. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = b = c = d = e = 65$.

Megvalósítható olyan kitöltés, ahol ez a feltétel teljesül, tehát ahol a soronkénti összegek egyenként 65-tel egyenlők: egy ilyen kitöltést mutat a táblázat.

11	12	13	14	15
4	10	16	17	18
2	3	19	20	21
5	7	8	22	23
1	6	9	24	25

A szorzat maximuma tehát 65^5, amelyet a bemutatott kitöltés esetén meg is valósul.

---

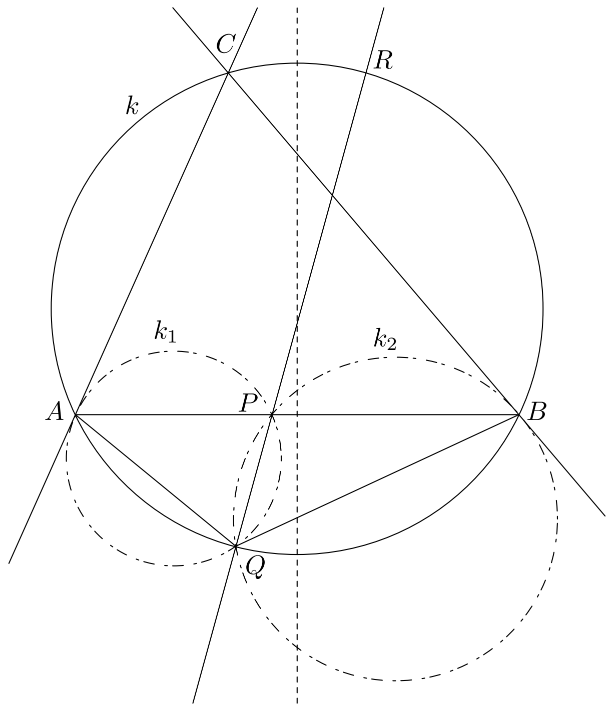
5. feladat: Legyen az ABC háromszög AB oldalának belső pontja P. Az AC egyenest az A pontban érintő, illetve a BC egyenest a B pontban érintő körök metszéspontjai a P és Q pontok. Bizonyítsa, hogy a C pontnak az AB szakasz felezőmerőlegesére vonatkozó tükörképe illeszkedik a PQ egyenesre!

Bíró Bálint (Magyarország)

Megoldás: Legyen az ABC háromszög köré írt kör k.

Először azt fogjuk bizonyítani, hogy a Q pont rajta van k-n.

A k_1 kör az A pontban érinti az AC egyenesét, hasonlóképpen a k_2 kör a B pontban érinti a BC egyenesét. Az érintő tulajdonsága és a kerületi szögek tétele miatt $PAC\sphericalangle = PQA\sphericalangle$ – ezek a Q pontot nem tartalmazó AP körívhez tartozó kerületi szögek a k_1 körben –, ugyanígy $PBC\sphericalangle = PQB\sphericalangle$ – ezek a szögek a Q pontot nem tartalmazó BP körívhez tartozó kerületi szögek a k_2 körben. Nyilvánvalóan $PAC\sphericalangle = BAC\sphericalangle$ és $PBC\sphericalangle = ABC\sphericalangle$.



Az 5. feladathoz.

Ezek szerint

$$BAC\sphericalangle + ABC\sphericalangle = PQA\sphericalangle + PQB\sphericalangle = AQB\sphericalangle = 180^\circ - ACB\sphericalangle,$$

azaz az $AQBC$ négyszög két szemközti szögének összege $180°$, tehát a négyszög húrnégyszög, így Q rajta van a k körön. (A C és Q pontok az AB egyenes különböző oldalán vannak).

Legyen most a PQ egyenes és a k kör Q-tól különböző metszéspontja R. Azt fogjuk bizonyítani, hogy a C pontnak az AB szakasz felezőmerőlegesére vonatkozó tükörképe éppen az R pont.

Az előzőek szerint $BAC\sphericalangle = PQA\sphericalangle = RQA\sphericalangle$, ugyanakkor k-ban egyenlő nagyságú kerületi szögekhez egyenlő hosszúságú húrok tartoznak, tehát $BC = AR$.

Hasonlóképpen igazolható, hogy $ABC\sphericalangle = PQB\sphericalangle = RQB\sphericalangle$ miatt $AC = BR$.

Ezért az R pont az A és B pontoktól rendre BC, illetve AC távolságra van, ez pedig csak úgy lehetséges, hogy az R pont nem más, mint a C pontnak az AB szakasz felezőmerőlegesére vonatkozó tükörképe. Ezzel a feladat állítását bizonyítottuk.

Megjegyzés. A feladat eredménye az is, hogy rögzített A, B, C pontok mellett a C pontnak az AB szakasz felezőmerőlegesére vonatkozó tükörképe mindig ugyanaz az R pont, és a P pont AB szakaszon belül elfoglalt helyzetétől függetlenül a PQ egyenes mindig az R ponton megy át.

Megjegyzés. A feladat állítása már az $BAC\sphericalangle = PQA\sphericalangle = RQA\sphericalangle$ egyenlőségből következik, mert eszerint $\widehat{BC} = \widehat{AR}$, ami miatt $ABRC$ húrtrapéz.

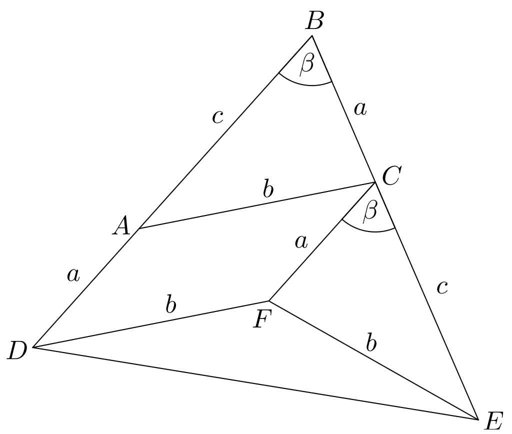
---

6. feladat: Jelöljük az ABC háromszög szögeit α, β, γ-val, az említett szögekkel szemközti oldalakat pedig rendre a, b, c-vel. Bizonyítsa be, hogy $b < \frac{1}{2}(a+c)$ esetén $\beta < \frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$.

Fonyó Lajos (Magyarország)

I. megoldás: Hosszabbítsuk meg az $ABC\triangle$ BA és BC oldalait A-n és C túl rendre a, illetve c távolsággal; legyenek a kapott pontok D és E.

$BD = BE = a + c$, tehát BDE egyenlő szárú háromszög. Húzzunk D-n keresztül AC-vel, C-n keresztül AD-vel párhuzamost, ezek metszéspontja legyen F. $DFCA$ paralelogramma a párhuzamosságok miatt: $FC = DA = a$ és $DF = AC = b$.



A 6. feladat I. megoldásához.

A párhuzamos helyzetű szögszárak miatt $ECF\sphericalangle = CBA\sphericalangle = \beta$. $ECF\triangle \cong ABC\triangle$, mert két oldaluk és ezek közbezárt szögei megegyeznek. Ezért $FE = AC = b$.

Írjuk fel a $DEF\triangle$-ben a háromszög-egyenlőtlenséget és használjuk fel a megadott feltételt:

$$DE < EF + FD = 2b < a + c = BD.$$

A DEB egyenlő szárú háromszögben $DEB\sphericalangle = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta)$, és mivel nagyobb oldallal szemben nagyobb szög található,

$$\begin{aligned} EBD\sphericalangle &< DEB\sphericalangle \\ \beta &< \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) \\ \beta &< \frac{1}{2}(\alpha + \gamma). \end{aligned}$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

II. megoldás: Mivel $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, ezért $\beta < \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$ akkor és csak akkor, ha $3\beta < \alpha + \beta + \gamma$, azaz ha $\beta < 60^\circ$.

Rendezzük a feltételt:

$$\begin{aligned} b &< \frac{a+c}{2} \\ 2 &< \frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \end{aligned}$$

Alkalmazzuk a szinusztételt, majd végezzünk átalakításokat.

$$\begin{aligned} 2 &< \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \\ 2\sin\beta &< \sin\alpha + \sin\gamma \\ 4\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} &< \sin\alpha + \sin\gamma && \text{kétszeres szögre vonatkozó addíciós tétel} \\ 4\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} &< 2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} && \text{szinuszok összegének szorzattá alakítása} \\ 4\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} &< 2\sin\frac{180^\circ-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} \\ 4\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} &< 2\sin\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} \\ 4\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} &< 2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} \\ 2\sin\frac{\beta}{2} &< \cos\frac{\alpha-\gamma}{2} \le 1 && \cos\frac{\beta}{2} > 0 \\ \sin\frac{\beta}{2} &< \frac{1}{2} \\ \frac{\beta}{2} &< 30^\circ \\ \beta &< 60^\circ \end{aligned}$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

III. megoldás: Tekintsük azt a háromszöget, aminek oldalai $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$. A szinusztétel garantálja, hogy ilyen háromszög létezik, hiszen

$$\sin\alpha = \sin\beta \cdot \frac{a}{b}; \qquad \sin\beta = \sin\beta \cdot \frac{b}{b}; \qquad \sin\gamma = \sin\beta \cdot \frac{c}{b},$$

és az $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{b}$, $\frac{c}{b}$ számok kielégítik a háromszög-egyenlőtlenséget.

Teljesül, hogy

$$\sin\beta < \frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\gamma).$$

Helyettesítsük be ugyanis a megfelelő kifejezéseket:

$$\sin\beta < \frac{1}{2}\left(\sin\beta\cdot\frac{a}{b} + \sin\beta\cdot\frac{c}{b}\right),$$

ez pedig $\sin\beta > 0$ miatt ekvivalens a feltétellel.

Ismeretes, hogy

$$\sin\alpha + \sin\gamma = 2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}.$$

Így a fentiek szerint

$$\sin\beta < \sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} \le \sin\frac{\alpha+\gamma}{2},$$

lévén $\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} \le 1$.

Mivel $\frac{\alpha+\gamma}{2} < \frac{\pi}{2}$ és a szinuszfüggvény szigorú monoton nő a $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban, így

$$\beta < \frac{\alpha+\gamma}{2}.$$