XXII. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Győr, 2013. március 14–18.

10. osztály

1. feladat: Határozza meg azt az x valós számot, amelyre az

$$f(x) = |8–x| + |11–x| + |13–x| + |16–x| + |19–x|$$

függvény értéke a legkisebb. Mennyi ez az érték?

Kántor Sándorné (Magyarország)

2. feladat: Keresse meg azokat a pozitív egész számpárokat, amelyeknek a számtani közepe eggyel nagyobb a harmonikus közepüknél! (Emlékeztetőül: két pozitív valós szám harmonikus közepének reciproka egyenlő a számok reciprokainak számtani közepével.)

Kallós Béla (Magyarország)

3. feladat: Igazolja, hogy bármely $2 \leq n$ egész számhoz léteznek olyan pozitív egész x, y, z számok, melyekre teljesül, hogy

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25^n.$$

Bencze Mihály (Erdély)

4. feladat: Ha x, y, z pozitív egész számok és $3x + 668y = 671z$, mutassa meg, hogy az

$$n = x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$$

szám osztható $2013 \cdot 668$-cal!

Longáver Lajos (Erdély)

5. feladat: Az A-ban derékszögű ABC háromszögben a BAC szög belső szögfelezője BC-t D-ben metszi. Az ADB szög belső szögfelezője AB-t az E pontban, míg az ADC szög belső szögfelezője AC-t az F pontban metszi. Igazolja, hogy a szokásos ($AB = c$, $BC = a$, $CA = b$) jelölésekkel: $BE + CF = \frac{a^2}{b+c}$.

Molnár István (Magyarország)

6. feladat: Adott egy téglalap, amelynek oldalai 6 és 3 egység hosszúságúak és a belsejében 19 egymástól különböző pont található. Igazolja, hogy létezik közöttük három olyan pont, amelyek által alkotott síkidom területe legfeljebb egy területegység.

Olosz Ferenc (Erdély)