XXII. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Győr, 2013. március 14–18.

10. osztály

1. feladat: Határozza meg azt az x valós számot, amelyre az

$$f(x) = |8–x| + |11–x| + |13–x| + |16–x| + |19–x|$$

függvény értéke a legkisebb. Mennyi ez az érték?

Kántor Sándorné (Magyarország)

1. feladat megoldása:

$$|8-x| = \begin{cases} -x+8, & \text{ha } x < 8 \\ x-8, & \text{ha } x \geq 8 \end{cases}$$

$$|11-x| = \begin{cases} -x+11, & \text{ha } x < 11 \\ x-11, & \text{ha } x \geq 11 \end{cases}$$

$$|13-x| = \begin{cases} -x+13, & \text{ha } x < 13 \\ x-13, & \text{ha } x \geq 13 \end{cases}$$

$$|16-x| = \begin{cases} -x+16, & \text{ha } x < 16 \\ x-16, & \text{ha } x \geq 16 \end{cases}$$

$$|19-x| = \begin{cases} -x+19, & \text{ha } x < 19 \\ x-19, & \text{ha } x \geq 19. \end{cases}$$

Így

$$f(x) = \begin{cases} -5x+67, & \text{ha } x < 8 \\ -3x+51, & \text{ha } 8 \leq x < 11 \\ -x+29, & \text{ha } 11 \leq x < 13 \\ x+3, & \text{ha } 13 \leq x < 16 \\ 3x-29, & \text{ha } 16 \leq x < 19 \\ 5x-67, & \text{ha } 19 \leq x. \end{cases}$$

$$f(13) = 16.$$

Könnyen látható, hogy $f(x) > 16$ minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{13\}$-ra. A függvény minimális értéke tehát 16, és ezt $x = 13$-nál veszi fel.

Általánosítás: Ha $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, akkor az $f(x) = |a_1 - x| + |a_2 - x| + \dots + |a_n - x|$ függvénynek, ha $n = 2k - 1$ ($k \in \mathbb{N}^+$), akkor az $x = a_k$ helyen van minimuma, ha pedig $n = 2k$, akkor $f(x)$ értéke az $[a_k, a_{k+1}]$ intervallumon állandó, máshol pedig nagyobb.

---

2. feladat: Keresse meg azokat a pozitív egész számpárokat, amelyeknek a számtani közepe eggyel nagyobb a harmonikus közepüknél! (Emlékeztetőül: két pozitív valós szám harmonikus közepének reciproka egyenlő a számok reciprokainak számtani közepével.)

Kallós Béla (Magyarország)

2. feladat I. megoldása: Jelöljük a két pozitív egész számot a-val és b-vel, ahol $a > b$ (egyenlők nem lehetnek, mert akkor megegyezik a számtani és a harmonikus közepük), és legyen a különbségük $k = a - b$. Ekkor felírhatók a következők:

$$\frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} + 1$$

$$(a+b)^2 = 4ab + 2a + 2b$$

$$(a-b)^2 = 2a + 2b$$

$$k^2 = 4b + 2k$$

$$k(k-2) = 4b$$

$$b = \frac{k(k-2)}{4}$$

$$a = \frac{k(k-2)}{4} + k = \frac{k(k+2)}{4}.$$

Ekkor a és b csak úgy lehet pozitív egész, ha k 2-nél nagyobb páros szám. Vagyis a és b olyan számok lehetnek, amelyeket három szomszédos pozitív páros számból kapunk: b a két kisebbik páros szám szorzatának negyede, a a két nagyobbik páros szám szorzatának a negyede lehet, azaz $b = \frac{k(k-2)}{4}$ és $a = \frac{k(k+2)}{4}$, ahol $k \geq 4$ páros szám.

Megmutatjuk, hogy minden ilyen esetben a számtani közép 1-gyel nagyobb lesz a harmonikus középnél. A harmonikus közép

$$\frac{2 \cdot \frac{k(k+2)}{4} \cdot \frac{k(k-2)}{4}}{\frac{k(k+2)}{4} + \frac{k(k-2)}{4}} = \frac{\frac{k^2(k^2-4)}{8}}{\frac{2k^2}{4}} = \frac{k^2-4}{4} = \frac{k^2}{4} - 1,$$

a számtani közép

$$\frac{\frac{k(k+2)}{4} + \frac{k(k-2)}{4}}{2} = \frac{k^2}{4}.$$

2. feladat II. megoldása: Jelöljük a két pozitív egész számot a-val és b-vel, ahol $a > b$ (egyenlők nem lehetnek, mert akkor megegyezik a számtani és a harmonikus közepük). Ekkor felírhatók a következők:

$$\frac{a+b}{2} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} + 1$$

$$\frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} + 1$$

$$(a+b)^2 = 4ab + 2a + 2b$$

$$(a-b)^2 = 2a + 2b.$$

A jobb oldal páros, tehát a bal oldal is. A négyzet miatt a számok különbsége is páros, azaz

$$a - b = 2t,$$

(ahol t pozitív egész), és így

$$a + b = 2t^2.$$

A két egyenlet összeadásával illetve kivonásával

$$a = t^2 + t, \qquad b = t^2 - t.$$

Mivel mind a két szám pozitív, ezért $t \geq 2$.

Az ellenőrzés azt mutatja, hogy a kapott alakok jók, hiszen

$$\frac{a+b}{2} = t^2,$$

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2t^2(t^2-1)}{2t^2} = t^2-1 = \frac{a+b}{2} - 1.$$

---

3. feladat: Igazolja, hogy bármely $2 \le n$ egész számhoz léteznek olyan pozitív egész x, y, z számok, melyekre teljesül, hogy

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25^n.$$

Bencze Mihály (Erdély)

3. feladat megoldása:

$$12^2 + 16^2 + 15^2 = 25^2$$
$$72^2 + 96^2 + 35^2 = 25^3$$
$$576^2 + 168^2 + 175^2 = 25^4$$
$$\ldots$$
$$(x_2, y_2, z_2) = (12, 16, 15)$$
$$(x_3, y_3, z_3) = (72, 96, 35)$$
$$(x_4, y_4, z_4) = (576, 168, 175).$$

Teljes indukcióval: ha (x_n, y_n, z_n) megoldások, akkor

$$x_{n+1} = 5^2 x_n, \quad y_{n+1} = 5^2 y_n, \quad z_{n+1} = 5^2 z_n$$

szintén megoldások lesznek, ugyanis

$$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 + z_{n+1}^2 = 25\left(x_n^2 + y_n^2 + z_n^2\right) = 25^{n+1}.$$

Tehát minden $1 < n$ természetes számhoz találtunk alkalmas x, y, z természetes számokat a feladat követelményének megfelelően. (Három ilyen számhármas sorozatunk is van, az $n = 1$-hez nincs ilyen x, y, z.)

---

4. feladat: Ha x, y, z pozitív egész számok és $3x + 668y = 671z$, mutassa meg, hogy az

$$n = x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$$

szám osztható $2013 \cdot 668$-cal!

Longáver Lajos (Erdély)

4. feladat I. megoldása: $3x + 668y = 671z \Leftrightarrow 3x - 3z = 668z - 668y \Leftrightarrow 3(x-z) = 668(z-y)$. De 3 és 668 relatív prímek, ezért $x - z = 668 \cdot k_1$, $z - y = 3 \cdot k_2$, ahol $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

$3x + 668y = 671z \Leftrightarrow 668y = 671z - 3x \Leftrightarrow 668y - 668x = 671z - 671x \Leftrightarrow 668(y-x) = 671(z-x)$. De 668 és 671 relatív prímek, ezért $y - x = 671 \cdot k_3$, ahol $k_3 \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
n &= x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) \\
&= x^2(y-z) + y^2z - y^2x + z^2x - z^2y \\
&= x^2(y-z) + yz(y-z) - x(y-z)(y+z) \\
&= (y-z)(x^2 + yz - xy - xz) \\
&= (y-z)(x-y)(x-z).
\end{aligned}$$

Így $3 \cdot 671 \cdot 668 = 2013 \cdot 668 | n$.

4. feladat II. megoldása: Alakítsuk át a vizsgálandó kifejezésünket:

$$\begin{aligned} n &= x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y) \\ &= x^2(y-z)+y^2z-yz^2+xz^2-xy^2 \\ &= x^2(y-z)+yz(y-z)-x\left(y^2-z^2\right) \\ &= (y-z)\left(x^2+yz-x(y+z)\right) \\ &= (y-z)(x-y)(x-z). \end{aligned}$$

Nézzük most a feltételt:

$$3x+668y=671z$$

$$3x-3y=671z-671y$$

$$3(x-y)=671(z-y).$$

Mivel 3 és 671 relatív prím, ezért

$$3|z-y \qquad 671|x-y.$$

Nézzük most a feltételt ismét:

$$3x+668y=671z$$

$$668y-668z=671z-671x$$

$$668(y-x)=671(z-x).$$

Mivel 668 és 671 relatív prím, ezért

$$668|z-x \qquad 671|x-y.$$

Összefoglalva

$$3|z-y \qquad 668|z-x \qquad 671|x-y \quad \Rightarrow \quad 3\cdot 668\cdot 671|(x-y)(y-z)(z-x),$$

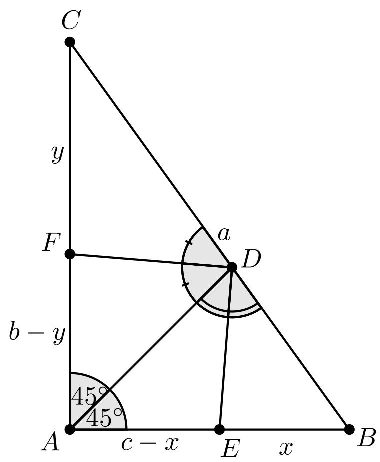
és ezt kellett bizonyítanunk.

---

5. feladat: Az A-ban derékszögű ABC háromszögben a BAC szög belső szögfelezője BC-t D-ben metszi. Az ADB szög belső szögfelezője AB-t az E pontban, míg az ADC szög belső szögfelezője AC-t az F pontban metszi. Igazolja, hogy a szokásos ($AB=c$, $BC=a$, $CA=b$) jelölésekkel: $BE+CF=\frac{a^2}{b+c}$.

Molnár István (Magyarország)

5. feladat I. megoldása: Legyen $BE=x$ és $CF=y$. Ekkor $AE=c-x$, illetve $AF=b-y$ lesz.



Alkalmazva a szögfelezőtételt az ABC háromszögben kapjuk, hogy $\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b}$. Innen egyszerű számításokkal felhasználva, hogy $BD+DC=a$, $BD=\frac{ac}{b+c}$ illetve $DC=\frac{ab}{b+c}$.

Az ABC háromszög területét kétféleképpen felírva:

$$\begin{cases} T_{ABC}=\frac{bc}{2} \\ T_{ABC}=T_{ADC}+T_{ADB}=\frac{AD\cdot b\cdot \sin 45^\circ}{2}+\frac{AD\cdot c\cdot \sin 45^\circ}{2}=AD\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot(b+c), \end{cases}$$

ahonnan

$$\frac{bc}{2}=AD\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot(b+c) \quad\Rightarrow\quad AD=\frac{bc\sqrt{2}}{b+c}.$$

Vagy: hosszabbítsuk meg az AB oldalt A-n túl $AC=b$-vel, így kapjuk a C' pontot. $CC'=b\sqrt{2}$, hiszen egyenlő szárú derékszögű háromszöget kapunk. Ugyanakkor CC' párhuzamos AD-vel, így alkalmazható rá a párhuzamos szelőszakaszok tétele:

$$\frac{AD}{CC'}=\frac{AB}{C'B} \quad\Rightarrow\quad AD=CC'\cdot\frac{AB}{C'B}=b\sqrt{2}\cdot\frac{c}{b+c}=\frac{bc\sqrt{2}}{b+c}.$$

(Ugyanezt az eredményt úgyis megkaphattuk volna, ha felhasználjuk a belső szögfelező hosszára vonatkozó összefüggést, mely alapján $AD=\frac{2}{b+c}\cdot\sqrt{bcs(s-a)}$, ahol s az ABC háromszög félkerülete, illetve az $a^2=b^2+c^2$ összefüggést a háromszög derékszögű volta miatt.)

Alkalmazzuk a szögfelezőtételt az ADB háromszögben:

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AD}{DB} \quad\Rightarrow\quad \frac{c-x}{x}=\frac{\frac{bc\sqrt{2}}{b+c}}{\frac{ac}{b+c}}=\frac{b\sqrt{2}}{a}.$$

Innen egyszerű számításokkal kapjuk, hogy $x=\frac{ac}{a+b\sqrt{2}}$.

Alkalmazzuk most a szögfelezőtételt az ADC háromszögben:

$$\frac{AF}{FC}=\frac{AD}{DC} \quad\Rightarrow\quad \frac{b-y}{y}=\frac{\frac{bc\sqrt{2}}{b+c}}{\frac{ab}{b+c}}=\frac{c\sqrt{2}}{a}.$$

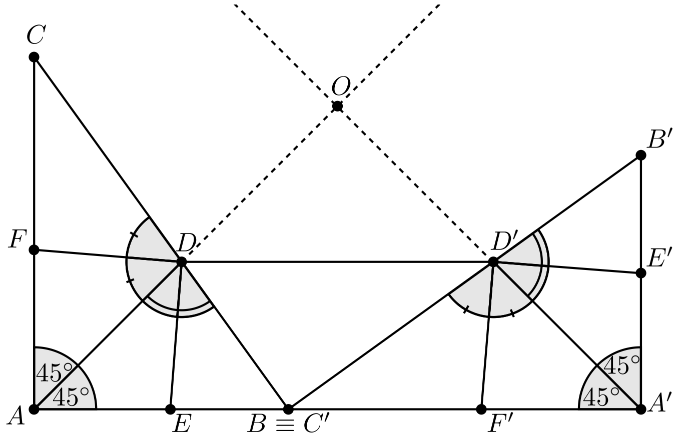
Innen egyszerű számításokkal kapjuk, hogy $y=\frac{ab}{a+c\sqrt{2}}$.

A kapott eredményeket és az $a^2=b^2+c^2$ összefüggést felhasználva:

$$\begin{aligned} BE+CF &= x+y=\frac{ac}{a+b\sqrt{2}}+\frac{ab}{a+c\sqrt{2}}=a\cdot\frac{ac+c^2\sqrt{2}+ab+b^2\sqrt{2}}{a^2+ab\sqrt{2}+ac\sqrt{2}+2bc} \\ &= a\cdot\frac{a(b+c)+(b^2+c^2)\sqrt{2}}{a^2+2bc+a(b+c)\sqrt{2}}=a\cdot\frac{a(b+c)+a^2\sqrt{2}}{b^2+c^2+2bc+a(b+c)\sqrt{2}} \\ &= a^2\cdot\frac{b+c+a\sqrt{2}}{(b+c)^2+a(b+c)\sqrt{2}}=\frac{a^2}{b+c}\cdot\frac{b+c+a\sqrt{2}}{b+c+a\sqrt{2}}=\frac{a^2}{b+c}. \end{aligned}$$

Tehát $BE+CF=\frac{a^2}{b+c}$.

5. feladat II. megoldása: Az ábránkból készítsünk egy másolatot $+90^\circ$-kal elforgatott helyzetben az eredeti mellé úgy, hogy C pont elforgatottja essen egybe B-vel.



$AA'O$ egyenlő szárú derékszögű háromszög, hiszen az alapon (AA'-n) fekvő szögei 45°-osak. $AD = A'D'$, ezért DD' párhuzamos AA'-vel. Mivel DF merőleges DE-re, valamint DF merőleges képére, $D'F'$-re, ezért DE párhuzamos $D'F'$-vel, így az $EF'D'D$ négyszög paralelogramma.

Tehát a keresett szakaszok összegére

$$BE + CF = BE + BF' = EF' = DD'.$$

Az AD szakasz hossza az I. megoldás szerint $AD = \frac{bc\sqrt{2}}{b+c}$.

Írjunk fel egy párhuzamos szelőszakaszok tételét az OA és OA' szögszáraknál:

$$\frac{DD'}{AA'} = \frac{DO}{AO} = \frac{AO - AD}{AO} = 1 - \frac{AD}{AO}$$

$$\frac{DD'}{b+c} = 1 - \frac{\frac{bc\sqrt{2}}{b+c}}{(b+c)\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 - \frac{\frac{2bc}{b+c}}{b+c} = 1 - \frac{2bc}{(b+c)^2},$$

azaz

$$DD' = b + c - \frac{2bc}{b+c} = \frac{(b+c)^2 - 2bc}{b+c} = \frac{b^2+c^2}{b+c} = \frac{a^2}{b+c}$$

$$BE + CF = \frac{a^2}{b+c}.$$

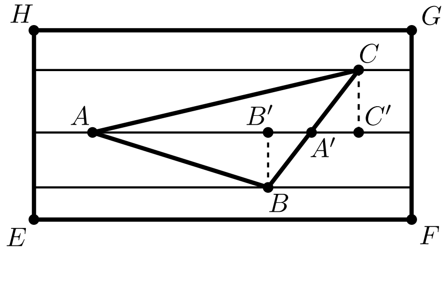
---

6. feladat: Adott egy téglalap, amelynek oldalai 6 és 3 egység hosszúságúak és a belsejében 19 egymástól különböző pont található. Igazolja, hogy létezik közöttük három olyan pont, amelyek által alkotott síkidom területe legfeljebb egy területegység.

Olosz Ferenc (Erdély)

6. feladat I. megoldása: Az oldalakkal párhuzamos egyenesekkel az adott téglalapot felosztjuk 9 darab 2×1-es téglalapra. Mivel 19 pontunk van, így biztosan lesz legalább 1 olyan téglalap, ami a belsejében vagy a határán tartalmaz legalább 3 pontot.

Ha e három pont nem egy egyenesen helyezkedik el, akkor a háromszög csúcsain a téglalap egyik oldalával párhuzamosokat húzunk.

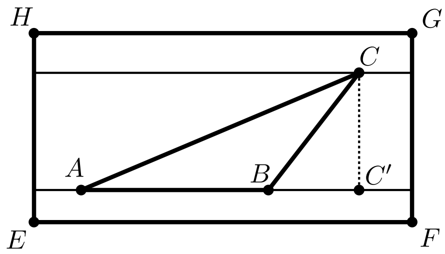


Először azt az esetet tanulmányozzuk, amikor három egymástól különböző párhuzamost húzhatunk. Ebben az esetben az egyik párhuzamos metszi az ABC háromszög egyik oldalát. Például az A csúcson átmenő EF-fel párhuzamos egyenes a BC oldalt A'-ben metszi.

Legyen B' illetve C' a B-ből illetve C-ből az AA' egyenesre állított merőlegesek talppontja. Ekkor a területekre

$$T_{ABC\triangle} = T_{AA'B\triangle} + T_{AA'C\triangle} = \frac{AA' \cdot BB'}{2} + \frac{AA' \cdot CC'}{2} = \frac{1}{2} \cdot AA' \cdot (BB' + CC') \leq \frac{1}{2} \cdot EF \cdot FG = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1.$$

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a háromszög egy oldala párhuzamos a téglalap egyik oldalával. Például legyen AB párhuzamos EF-fel.



Legyen C' a C-ből az AB-re állított merőleges talppontja. Így

$$T_{ABC\triangle} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CC' \leq \frac{1}{2} \cdot EF \cdot FG = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1.$$

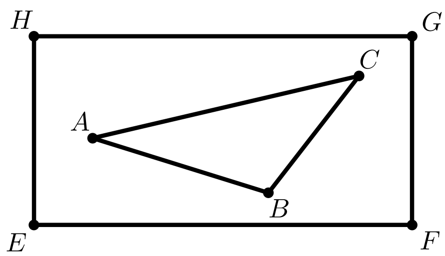
Ha az A, B, C pontok egy egyenesen helyezkednek el, akkor $T_{ABC\triangle} = 0 \leq 1$.

Tehát létezik olyan ABC valódi vagy elfajuló háromszög, amelyre $T_{ABC\triangle} \leq 1$.

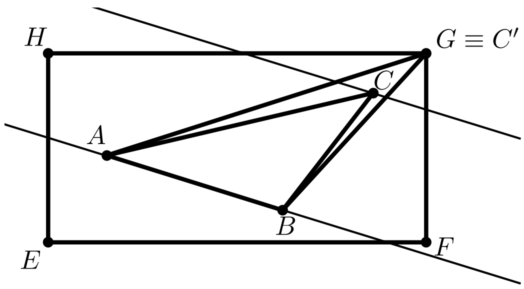
6. feladat II. megoldása: Osszuk fel az adott téglalapot az oldalaival párhuzamos egyenesek segítségével 2×1-es téglalapokra, kapunk 9 darab téglalapot. Mivel 19 pontunk van, így biztosan lesz legalább 1 olyan téglalap, ami a belsejében vagy a határán tartalmaz legalább 3 pontot.

Most bebizonyítjuk, hogy ha egy téglalap belsejében vagy a határán tartalmaz 3 pontot, akkor e három pont által meghatározott háromszög területe nem lehet nagyobb a téglalap területének a felénél. Ekkor a mi esetünkben e háromszög területe nem nagyobb 1-nél, és ezt kell bizonyítanunk.

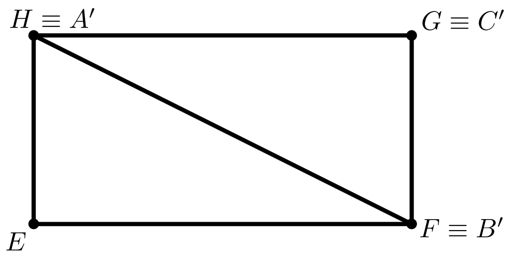
Tekintsük az ábrát és ott a 3 általánosan felvett pontot.



Húzzuk meg az AB egyenesét és húzzunk párhuzamost ezzel C-n keresztül. Ekkor a téglalapnak van olyan csúcsa, amit a C-n át húzott egyenes az AB egyenestől elválaszt. Mozgassuk ide a C pontot (legyen ez C'), így a háromszögünk területét nem csökkentettük.



Ezt ismételjük meg az A és B csúcsokkal is, ekkor a háromszögünk területét nem csökkentettük és a következő ábrát kapjuk.



Most biztosan a téglalap területének felével egyezik meg a háromszög területe, tehát közben sem lehetett nagyobb, hiszen a mozgatások alkalmával nem csökkenhetett a terület. Készen vagyunk.

6. feladat III. megoldása: Legyen az adott 19 pont konvex burka k-szög, belsejében legyen b pont, ekkor

$$k + b = 19.$$

Most osszuk fel az elrendezést háromszögekre, azaz kössük össze a pontokat egymást nem keresztező szakaszokkal addig, amíg már csak háromszögek nem lesznek. A keletkezett háromszögek számát jelöljük h-val. Ekkor a szögösszeget számolva:

$$(k-2)\cdot 180° + b \cdot 360° = h \cdot 180°$$

$$k - 2 + 2b = h$$

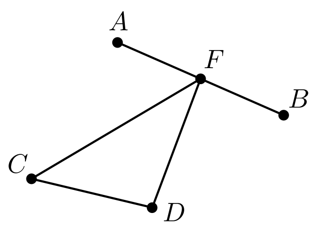
$$(k+b) - 2 + b = h$$

$$h = 17 + b.$$

Kaptuk, hogy a keletkezett háromszögek száma csak a belső pontok számától függ.

Amennyiben a belső pontok száma legalább 1, akkor 18 vagy több háromszög keletkezik. Amennyiben minden háromszögnek a területe nagyobb lenne, mint 1, akkor az összes terület nagyobb lenne, mint 18, ami ellentmond a feltételnek. Tehát létezik háromszög, aminek a területe legfeljebb 1.

Ha nincs belső pont, akkor a 19 pont konvex burka 19-szög. Válasszunk ki egy oldalt, végpontjai legyenek A és B. Kössük össze AB szakasz F felezőpontját a többi, egymást követő csúcspárral, így 18 darab háromszöget kapunk. Ezek nem lehetnek mind 1-nél nagyobb területűek, hiszen akkor az összterület 18-nál nagyobb lenne. Tekintsük azt a háromszöget, melynek területe nem nagyobb 1-nél, a csúcsai legyenek F, C és D.



Ha AB párhuzamos CD-vel, akkor az ACD és BCD háromszögek területe megegyezik az FCD háromszög területével, azaz 1-nél nem nagyobbak.

Ha AB nem párhuzamos CD-vel, akkor vagy A vagy B pont közelebb van a CD egyeneshez, mint az F pont. Amelyik közelebb van, azt választva a C és D csúcsokhoz, akkor FCD-nél kisebb területű háromszöget kapunk, tehát 1-nél biztosan kisebb területűt.