XXI. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Kecskemét, 2012. március 14-18.

12. osztály

1. feladat: A tízes számrendszerben háromjegyű pozitív egész számok közül véletlenszerűen válasszunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy olyan néggyel osztható számot választunk, melynek jegyei páronként különbözőek?

Tarcsay Tamás (Szeged)

2. feladat: Határozzuk meg a

$$\sqrt{2012} \cdot x^{\log_{2012} x} = x^2$$

egyenlet megoldásai szorzata egészrészének utolsó öt számjegyét!

Kántor Sándorné (Debrecen)

3. feladat: Mutassuk meg, hogy

$$\sin^{2010} x + \cos^{2011} x + \sin^{2012} x \leq 2$$

bármely valós x esetén!

Katz Sándor (Bonyhád)

4. feladat: Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AC = BC$, az AB alap felezőpontja D, az A és a D pontból a BC szakaszra bocsátott merőlegesek talppontja rendre a BC szakasz E, illetve F belső pontja. A DF szakasz G felezőpontját a C ponttal összekötő szakasz és az AF szakasz metszéspontja H. Bocsássunk merőlegeseket a D pontból az AE és az AF egyenesekre, a merőlegesek talppontjai legyenek rendre K és L! Bizonyítsuk be, hogy az AF, EH és KL egyenesek az ABC háromszöghöz hasonló háromszöget zárnak közre!

Bíró Bálint (Eger)

5. feladat: A, B, C véges halmazok, amelyekre teljesül, hogy $|A| = |B| = |C| = a$ és $|A \cap B \cap C| = b$, ahol a és b nemnegatív egészek. Adjuk meg a és b függvényeként az $|A \cup B \cup C|$ minimumát és maximumát! ($|X|$ az X halmaz elemeinek számát jelöli.)

Gecse Frigyes (Kisvárda)

6. feladat: Legyen $a_1 = 1, a_2 = 2$ és $\dfrac{1}{a_{n+2}} = \dfrac{1}{2} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k+2}}{a_{k+1} \cdot (a_k + a_{k+1} + a_{k+2})}$ $(n \geq 1$ egész$)$. Adjuk meg a_n-t zárt formában, azaz n függvényeként!

Bencze Mihály (Brassó)