XXI. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Kecskemét, 2012. március 14-18.

12. osztály

1. feladat: A tízes számrendszerben háromjegyű pozitív egész számok közül véletlenszerűen választunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy olyan néggyel osztható számot választunk, melynek jegyei páronként különbözőek?

Tarcsay Tamás (Szeged)

Megoldás: A tízes számrendszerben háromjegyű számok száma 900. Egy pozitív egész szám akkor és csak akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két jegyéből képzett kétjegyű szám osztható 4-gyel.

25 különböző 4-gyel osztható végződés van, ezek közül a 00, 44 és 88 nem felel meg, mert ismétlődő számjegy van benne, így marad 22 darab „jó” végződés.

Ezek között 6 tartalmaz 0 számjegyet (04, 08, 20, 40, 60, 80). Ezek elé még 8 különböző számjegyet írhatunk, így 48 darab „kedvező” számot kaphatunk.

A fennmaradó 16 végződés elé 7 különböző számot írhatunk (a 0-t nem), így 112 darab „kedvező” számot kaphatunk. A „kedvező” számok száma: $48 + 112 = 160$.

A keresett valószínűség: $P = \dfrac{160}{900} = \dfrac{8}{45} \approx 0{,}18$.

---

2. feladat: Határozzuk meg a

$$\sqrt{2012} \cdot x^{\log_{2012} x} = x^2$$

egyenlet megoldásai szorzata egészrészének utolsó öt számjegyét!

Kántor Sándorné (Debrecen)

Megoldás: A logaritmus definíciója miatt $x > 0$. Vegyük az egyenlet mindkét oldalának 2012-es alapú logaritmusát, és használjuk fel a logaritmus azonosságait:

$$\frac{1}{2}\log_{2012} 2012 + \log_{2012}^2 x = 2\log_{2012} x.$$

A $\log_{2012} x = a$ jelölés bevezetésével kapjuk, hogy $a^2 - 2a + \frac{1}{2} = 0$.

Innen $a_1 = \log_{2012} x_1 = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}}$ és $a_2 = \log_{2012} x_2 = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Mindkét megoldás pozitív és összegük 2. $\log_{2012}(x_1 \cdot x_2) = \log_{2012} x_1 + \log_{2012} x_2 = 2$ miatt

$$x_1 \cdot x_2 = 2012^2 = (2000 + 12)^2 = 2000^2 + 48000 + 144 = 4\ 048\ 144,$$

vagyis a szorzat utolsó öt számjegye: 48 144.

---

3. feladat: Mutassuk meg, hogy

$$\sin^{2010} x + \cos^{2011} x + \sin^{2012} x \leq 2$$

bármely valós x esetén!

Katz Sándor (Bonyhád)

Megoldás: Bármely 1-nél nem nagyobb abszolútértékű valós z és bármely $n \geq 2$ esetén teljesül a $z^n \leq z^2$ összefüggés.

Mivel $|\sin x| \leq 1$ és $|\cos x| \leq 1$, ezért bármely valós x esetén

$$\sin^{2010} x + \cos^{2011} x + \sin^{2012} x \leq \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^{2012} x \leq 1 + 1 = 2.$$

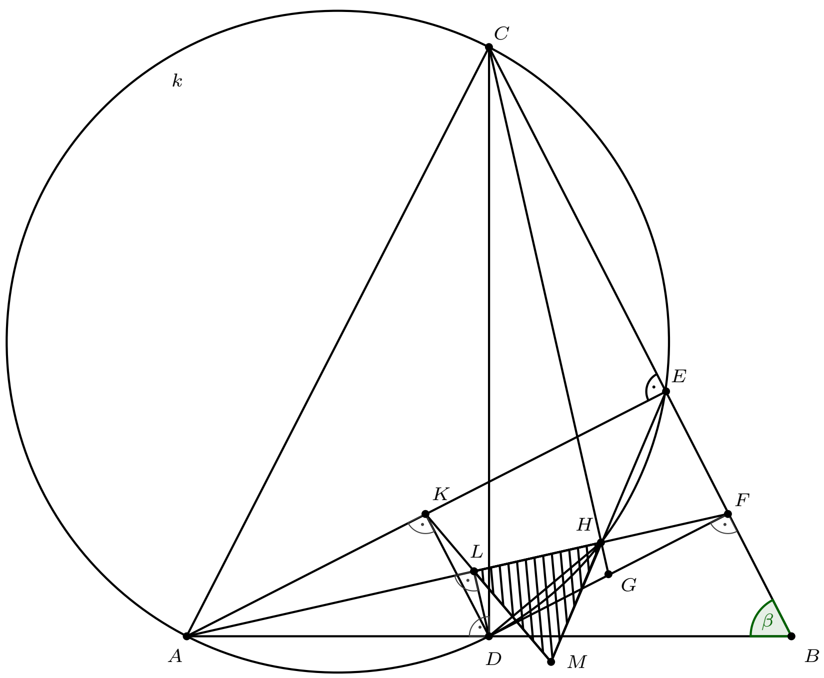
Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, (k egész szám).

---

4. feladat: Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AC = BC$, az AB alap felezőpontja D, az A és a D pontból a BC szakaszra bocsátott merőlegesek talppontja rendre a BC szakasz E, illetve F belső pontja. A DF szakasz G felezőpontját a C ponttal összekötő szakasz és az AF szakasz metszéspontja H. Bocsássunk merőlegeseket a D pontból az AE és az AF egyenesekre, a merőlegesek talppontjai legyenek rendre K és L! Bizonyítsuk be, hogy az AF, EH és KL egyenesek az ABC háromszöghöz hasonló háromszöget zárnak közre!

Bíró Bálint (Eger)

Megoldás: Az állítás bizonyításához készített ábrán az AC szakasz Thalész-körét k, a $CBA\sphericalangle = CAB\sphericalangle$ szögeket pedig β jelöli.



Mivel $ABE\sphericalangle = \beta$, ezért az ABE derékszögű háromszögben $BAE\sphericalangle = 90° - \beta$, így a DAK derékszögű háromszögben $ADK\sphericalangle = \beta$, továbbá az egybevágó ACD és BCD derékszögű háromszögekben $ACD\sphericalangle = BCD\sphericalangle = 90° - \beta$.

Az A, D, L, K pontok az AD szakasz fölé rajzolt Thalész-körre illeszkednek, ezek a pontok tehát egy húrnégyszög csúcsai, ebből a kerületi szögek tétele miatt $ADK\sphericalangle = ALK\sphericalangle = \beta$ következik.

Az AF, EH és KL egyenesek által közrezárt LMH háromszögben azonban $HLM\sphericalangle = \beta$, hiszen $ALK\sphericalangle$ és $HLM\sphericalangle$ csúcsszögek.

A továbbiakban belátjuk, hogy a H pont illeszkedik k-ra. Ehhez először igazoljuk, hogy az AF egyenes merőleges a CG egyenesre.

A DF egyenes párhuzamos AE-vel, hiszen mindkettő merőleges BC-re, és mivel D az AB felezőpontja, ezért DF középvonala az ABE háromszögnek, és így F felezőpontja az EF szakasznak. A megfelelő szögek egyenlősége miatt az ABE és DBF háromszögek hasonlók (a hasonlóság aránya $2:1$).

A DF szakasz a BCD derékszögű háromszög átfogójához tartozó magassága, és mint ismeretes, ez a magasság két hasonló háromszögre bontja az eredeti háromszöget, eszerint a DBF és CDF háromszögek hasonlók. A hasonlóság tranzitív tulajdonsága miatt ezért az ABE és a CDF háromszögek is hasonlók, a megfelelő oldalak aránya tehát egyenlő, azaz $\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FD}$.

Mivel azonban $FD = 2 \cdot FG$ és $EB = 2 \cdot EF$, ezért

$$\frac{AE}{EF} = \frac{CF}{FG} \tag{1}$$

Az (1) egyenlőség szerint az AEF és CFG háromszögekben két-két oldal aránya megegyezik, ugyanakkor ezekben a háromszögekben az AE; EF illetve CF; FG oldalak derékszöget zárnak be, így tehát az AEF és CFG háromszögek hasonlók.

Hasonló háromszögekben a megfelelő szögek egyenlők, így $FAE\sphericalangle = GCF\sphericalangle = HCF\sphericalangle$ (az ábrán két ívvel jelölt szögek).

Az A és C pontok az EH egyenes ugyanazon oldalán vannak, az előzőek szerint pedig az A és C pontokból az EH szakasz egyenlő nagyságú szögben látszik, így az A, H, E, C pontok egy körre, a k körre illeszkednek.

Az $AHEC$ húrnégyszögben $ACE\sphericalangle = 180° - 2\beta$, ezért a vele szemközti szögre $AHE\sphericalangle = 2\beta$ teljesül. Az $AHE\sphericalangle$ mellékszöge az $LHM\sphericalangle$, és így $LHM\sphericalangle = 180° - 2\beta$.

Az LMH háromszögben tehát $HLM\sphericalangle + LHM\sphericalangle + HML\sphericalangle = 180°$, azaz $\beta + 180° - 2\beta + HML\sphericalangle = 180°$, innen pedig azonnal adódik, hogy $HML\sphericalangle = \beta$.

Az LMH háromszög szögei ezért $HLM\sphericalangle = HML\sphericalangle = \beta$ és $LHM\sphericalangle = 180° - 2\beta$, ezért az ABC háromszög, és az AF, EH és KL egyenesek által közrezárt LMH háromszög valóban hasonlók.

Megjegyzés: A KL egyenes az AEH háromszögnek a D ponthoz tartozó Simson-Wallace-egyenese.

---

5. feladat: A, B, C véges halmazok, amelyekre teljesül, hogy $|A| = |B| = |C| = a$ és $|A \cap B \cap C| = b$, ahol a és b nemnegatív egészek. Adjuk meg a és b függvényeként az $|A \cup B \cup C|$ minimumát és maximumát! ($|X|$ az X halmaz elemeinek számát jelöli.)

Gecse Frigyes (Kisvárda)

Megoldás: Előbb a maximumot (jelölje x) határozzuk meg. Legyen $M = A \cap B \cap C$, $A_1 = A \setminus M$, $B_1 = B \setminus M$, $C_1 = C \setminus M$. Mivel A az A_1 és M diszjunkt halmazok uniója, ezért $a = |A| = |A_1| + |M|$ és $b = |M|$ miatt $A_1 = a - b$. Hasonlóan $B_1 = a - b$, $C_1 = a - b$.

Nyilvánvaló, hogy
$$A \cup B \cup C = M \cup A_1 \cup B_1 \cup C_1. \tag{2}$$
Az $|A \cup B \cup C|$ akkor a legnagyobb, ha az A_1, B_1, C_1 halmazok páronként diszjunktak. Ekkor

$$x = \max |A \cup B \cup C| = |M| + |A_1| + |B_1| + |C_1| = b + 3(a-b) = 3a - 2b.$$

Térjünk át a minimum (jelölje y) meghatározására! Az M és az $A_1 \cup B_1 \cup C_1$ halmazok diszjunktak, ezért (2) alapján a $z = |A_1 \cup B_1 \cup C_1|$ jelöléssel

$$|A \cup B \cup C| = |M| + |A_1 \cup B_1 \cup C_1| = b + z. \tag{3}$$

Nézzük, hogyan választható z a legkisebbnek! Vezessük be az $A_1 \cap B_1 = D$, $A_2 = A_1 \setminus D$, $B_2 = B_1 \setminus D$, $D = u$, $v = a - b - u$ jelöléseket! Két esetet vizsgálunk.

1. Ha $u \geq v$, akkor $u \geq \frac{1}{2}(a-b)$. Ekkor a C halmaz úgy választható, hogy $A_2 \subset C$, $B_2 \subset C$ legyen. Ekkor

   $$z = |A_1 \cup B_1 \cup C_1| = |D| + |A_2| + |B_2| + |C_1 \setminus (A_2 \cup B_2) = u + 2v + |C_1 \setminus (A_2 \cup B_2)\,|. \tag{4}$$

   De $|C_1 \setminus (A_2 \cup B_2) = a - b - 2v$, mert A_2 és B_2 diszjunktak, és így $A_2 \cap B_2 \cap C_1 = \emptyset$. Ennélfogva

   $$z = u + 2v + a - b - 2v = u + a - b \geq \frac{1}{2}(a-b) + a - b = \frac{3(a-b)}{2}.$$

   Ha $\frac{1}{2}(a-b)$ egész szám, akkor A_1-et és B_1-et úgy választjuk ki, hogy $u = \frac{1}{2}(a-b)$ legyen. Ekkor $z = \frac{1}{2}(a-b)$ és $y = b + \frac{3}{2}(a-b) = \left[\frac{3a-b+1}{2}\right]$, ahol [ ] az egészrész jele. Ha az $\frac{1}{2}(a-b)$ $\frac{1}{2}$-del különbözik egy egész számtól, akkor a halmazokat úgy kell megválasztani, hogy $z = \frac{3a-b}{2} + \frac{1}{2}$ legyen, és ismét $y = b + \frac{3a-b}{2} + \frac{1}{2} = \left[\frac{3a-b+1}{2}\right]$.

2. Ha $u > v$, akkor a halmazok úgy választhatók, hogy $z = u + 2v = a - b + v \geq \frac{3(a-b)}{2}$, és ismét $y = \left[\frac{3a-b+1}{2}\right]$

Tehát a feladat megoldása: $x = 3a - 2b$, $y = \left[\frac{3a-b+1}{2}\right]$.

---

6. feladat: Legyen $a_1 = 1, a_2 = 2$ és $\dfrac{1}{a_{n+2}} = \dfrac{1}{2} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_{k+2}}{a_{k+1} \cdot (a_k + a_{k+1} + a_{k+2})}$ ($n \geq 1$ egész). Adjuk meg a_n-t zárt formában, azaz n függvényeként!

Bencze Mihály (Brassó)

Megoldás: A rekurzív definíció szerint:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_{1+2}} &= \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{1} \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}\,(a_k + a_{k+1} + a_{k+2})} = \frac{1}{2} - \frac{a_{1+2}}{a_{1+1}\,(a_1 + a_{1+1} + a_{1+2})} \\
\frac{1}{a_3} &= \frac{1}{2} - \frac{a_3}{a_2\,(a_1 + a_2 + a_3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_3} &= \frac{1}{2} - \frac{a_3}{2\,(1+2+a_3)} \\
\frac{1}{a_3} &= \frac{1}{2} - \frac{a_3}{2\,(3+a_3)} \\
6+2a_3 &= a_3(3+a_3) - a_3^2 \\
6+2a_3 &= 3a_3 \\
6 &= a_3
\end{aligned}$$

Az előzmények alapján megfogalmazható a sejtés, hogy $a_n = n!$. Bizonyítsuk az állítást teljes indukcióval!

Láttuk, hogy $n=1$, $n=2$, $n=3$ esetén igaz az állítás! Tegyük fel, hogy $a_t = t!$, ha t n-nél nem nagyobb pozitív egész szám ($n \geq 4$)! A rekurzív definíció szerint:

$$\frac{1}{a_{t+1}} = \frac{1}{a_{(t-1)+2}} = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{t-1} \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}(a_k + a_{k+1} + a_{k+2})} =$$

$$= \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{t-2} \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}(a_k + a_{k+1} + a_{k+2})} - \frac{a_{t+1}}{a_t(a_{t-1} + a_t + a_{t+1})}$$

Alkalmazva az indukciós feltevést:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_{t+1}} &= \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{t-2} \frac{(k+2)!}{(k+1)!(k! + (k+1)! + (k+2)!)} - \frac{a_{t+1}}{t! \cdot ((t-1)! + t! + a_{t+1})} \\
\frac{1}{a_{t+1}} &= \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{t-2} \frac{k+2}{k! \cdot (1 + k + 1 + (k+1)(k+2))} - \frac{a_{t+1}}{t! \cdot ((t-1)! + t! + a_{t+1})} \\
\frac{1}{a_{t+1}} &= \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{t-2} \frac{k+2}{k! \cdot (1 + k + 1 + k^2 + 3k + 2)} - \frac{a_{t+1}}{t! \cdot ((t-1)! + t! + a_{t+1})} \\
\frac{1}{a_{t+1}} &= \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{t-2} \frac{k+2}{k! \cdot (k^2 + 4k + 4)} - \frac{a_{t+1}}{t! \cdot ((t-1)! + t! + a_{t+1})} \\
\frac{1}{a_{t+1}} &= \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{t-2} \frac{k+2}{k! \cdot (k+2)^2} - \frac{a_{t+1}}{t! \cdot ((t-1)! + t! + a_{t+1})} \\
\frac{1}{a_{t+1}} &= \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{t-2} \frac{1}{k! \cdot (k+2)} - \frac{a_{t+1}}{t! \cdot ((t-1)! + t! + a_{t+1})}
\end{aligned}$$

Ugyanakkor

$$\frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!} = \frac{(k+2)! - (k+1)!}{(k+1)! \cdot (k+2)!} = \frac{(k+1)!(k+2-1)}{(k+1)! \cdot (k+2)!} = \frac{k+1}{(k+2) \cdot (k+1) \cdot k!} = \frac{1}{k! \cdot (k+2)}$$

Ezt felhasználva

$$\frac{1}{a_{t+1}} = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{t-2} \left(\frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!} \right) - \frac{a_{t+1}}{t! \cdot ((t-1)! + t! + a_{t+1})}$$

$$\frac{1}{a_{t+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots - \frac{1}{(t-2)!} + \frac{1}{(t-1)!} - \frac{1}{(t-1)!} + \frac{1}{t!} - \frac{a_{t+1}}{t! \cdot ((t-1)! + t! + a_{t+1})}$$

Teleszkópikus összeget kaptunk:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_{t+1}} &= \frac{1}{t!} - \frac{a_{t+1}}{t! \cdot ((t-1)! + t! + a_{t+1})} \\
t! &= a_{t+1} - \frac{a_{t+1}^2}{(t-1)! \cdot (t+1) + a_{t+1}} \\
(t-1)! \cdot (t+1)! + t! \cdot a_{t+1} &= (t-1)! \cdot (t+1) \cdot a_{t+1} \\
(t-1)! \cdot (t+1)! &= (t-1)! \cdot (t+1) \cdot a_{t+1} - t! \cdot a_{t+1} \\
(t-1)! \cdot (t+1)! &= (t-1)! \cdot a_{t+1} \cdot (t+1-t) \\
(t+1)! &= a_{t+1}
\end{aligned}$$

Az állítást bebizonyítottuk.