XXI. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Kecskemét, 2012. március 14–18.

11. osztály

1. feladat: Határozzuk meg azokat a pozitív egész számpárokat, amelyek számtani közepe 1-gyel nagyobb a mértani közepüknél!

Kallós Béla (Nyíregyháza)

1. feladat I. megoldása: Vezessük be a következő jelöléseket: $\frac{a+b}{2} = k+1, \sqrt{ab} = k$, ahol a és b pozitív egész számok. Először azt igazoljuk, hogy a feltételek következményeként k csak egész szám lehet. Ugyanis két egész szám számtani közepe vagy egész, vagy $n + \frac{1}{2}$ alakú, ahol n egész szám. A második esetben azonban $ab = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2$ teljesülne, de itt a bal oldal egész szám, míg a jobb oldal nem.
Mivel $a + b = 2k + 2$, ezért

$$b = 2k + 2 - a. \tag{1}$$

Ezt a $k^2 = ab$ egyenletbe helyettesítve:

$$k^2 = (2k + 2 - a) \cdot a$$

$$k^2 - 2ka + a^2 = 2a$$

$$(k - a)^2 = 2a$$

Ebből következik, hogy ha létezik a feltételeknek megfelelő számpár, akkor abban az a páros és egy négyzetszám kétszerese, azaz $a = 2n$ (n pozitív egész). Ekkor

$$k - a = k - 2n^2 = 2n \text{ vagy } k - a = k - 2n^2 = 2n,$$

ahonnan

$$k = 2n^2 + 2n \text{ vagy } k = 2n^2 - 2n.$$

Helyettesítsük a k-ra kapott kifejezéseket (1)-be:

$$b = 2\left(2n^2 + 2n\right) + 2 - 2n^2 = 2\,(n+1)^2 \text{ vagy } b = 2\left(2n^2 - 2n\right) + 2 - 2n^2 = 2\,(n-1)^2\,.$$

Tehát bármely két szomszédos pozitív négyzetszám kétszereseire teljesülhet csak, hogy számtani közepük 1-gyel nagyobb a mértani közepüknél.
Számolással könnyen ellenőrizhető, hogy minden n pozitív egész szám esetén az $a = 2n^2, b = 2\,(n+1)^2$ számpárra teljesül, hogy számtani közepük 1-gyel nagyobb a mértani közepüknél.

1. feladat II. megoldása: Legyen $\frac{a+b}{2} = x$. A feltételek alapján x egy pozitív egész szám fele! Legyen y olyan szám, hogy $b = x + y$ és $a = x - y$ teljesüljön (y egy természetes szám fele). Ekkor

$$\frac{a+b}{2} - 1 = \sqrt{ab}$$

$$x - 1 = \sqrt{(x-y)\,(x+y)}$$

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 - y^2$$

$$-2x + 1 = -y^2$$

$$x = \frac{y^2+1}{2}.$$

Így

$$a = x - y = \frac{y^2+1}{2} - y = \frac{(y-1)^2}{2}$$

$$b = x + y = \frac{y^2+1}{2} + y = \frac{(y-1)^2}{2}.$$

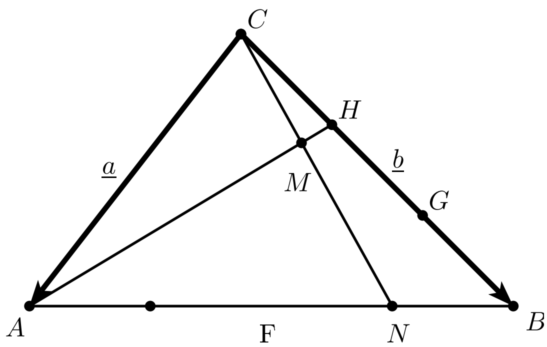
Látható, hogy a és b akkor pozitív egészek, ha y páratlan pozitív egész szám. Ekkor a és b egymást követő páros négyzetszámok felei.
Számolással könnyen ellenőrizhető, hogy minden ilyen a és b teljesíti a feltételt.

---

2. feladat: Az ABC háromszögben H a BC oldal C-hez közelebbi harmadoló pontja, N pedig az AB oldal B-hez közelebbi negyedelő pontja. Az AH és CN szakaszok metszéspontja M.
a) Milyen arányban osztja az M pont az AH és CN szakaszokat?
b) Hányad része az ABC háromszög területének a $HMNB$ négyszög területe?

Katz Sándor (Bonyhád)

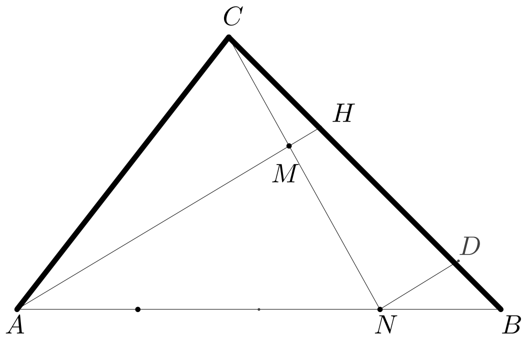
2. feladat I. megoldása:
a) I. megoldás: Vektorok alkalmazásával.



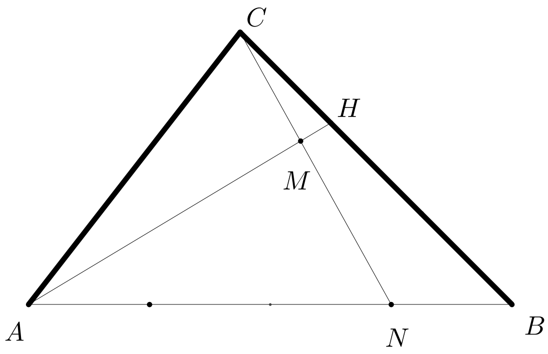
Legyen, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{a}$ és $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{b}$. Ekkor $\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b}$ és $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a} + \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{a} + \frac{3}{4}\overrightarrow{b}$. Ha $\overrightarrow{AM} = x \cdot \overrightarrow{AH}$, akkor $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{a} + x \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{a} + x\left(-\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b}\right) = (1-x)\,\overrightarrow{a} + \frac{x}{3}\overrightarrow{b}$. Ha $\overrightarrow{CM} = y \cdot \overrightarrow{CN}$, akkor $\overrightarrow{CM} = \frac{y}{4}\overrightarrow{a} + \frac{3y}{3}\overrightarrow{b}$. A vektorfelbontás egyértelműsége miatt $\overrightarrow{CM}$ két felbontásában az $\overrightarrow{a}$ és $\overrightarrow{b}$ együtthatói egyenlők: $1 - x = \frac{y}{4}$ és $\frac{x}{3} = \frac{3y}{4}$. Ebből $x = \frac{9}{10}$ és $y = \frac{2}{5}$. Tehát

$$AM : MH = 9 : 1 \text{ és } CM : MN = 2 : 3.$$

a) II. megoldás: A párhuzamos szelők tételének alkalmazásával.



Legyen DN párhuzamos HA-val! Ekkor $BD : DH = BN : NA = 1 : 3$. Mivel $HB = \frac{2}{3}BC$, ezért $HD = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}BC = \frac{1}{2}BC$. Így $CM : MN = CH : HD = 2 : 3$. Másrészt $MH : ND = CM : CN = 2 : 5$, azaz $MH = \frac{2}{5}ND$, továbbá $ND : AH = BN : BA = 1 : 4$, azaz $AH = 4ND$. Ebből $AM = \left(4 - \frac{2}{5}\right)ND = \frac{18}{5}ND$, így $AM : MH = 18 : 2 = 9 : 1$.



a) III. megoldás: Menelaosz tételének alkalmazásával.

Az NBC háromszögre: $\dfrac{BM}{HC} \cdot \dfrac{CM}{MN} \cdot \dfrac{NA}{AB} = 1$, azaz $\dfrac{2}{1} \cdot \dfrac{CM}{MN} \cdot \dfrac{3}{4} = 1$. Ebből $CM : MN = 2 : 3$. Az ABH háromszögre: $\dfrac{BN}{NA} \cdot \dfrac{AM}{MH} \cdot \dfrac{HC}{CB} = 1$, azaz $\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{AM}{MH} \cdot \dfrac{1}{3} = 1$. Ebből $AM : MH = 9 : 1$.

b) Megoldás: Legyen az ABC háromszög területe T!

$NB = \dfrac{1}{4}AB \implies T_{NBC\triangle} = \dfrac{1}{4}T$. Az NBC háromszög CB oldalát harmadára, CN oldalát két ötödére csökkentve a CMH háromszög CH illetve CM oldalait kapjuk. Mivel az NBC és CMH háromszögek C csúcsánál lévő szöge közös, ezért a terület $\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{2}{15}$ részre csökken, tehát $T_{CMH\triangle} = \dfrac{2}{15} \cdot \dfrac{1}{4}T = \dfrac{1}{30}T$. Ebből a $HMNB$ négyszög területe $t = \dfrac{1}{4}T - \dfrac{1}{30}T = \dfrac{13}{60}T$.

---

3. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$3^{2x+1} - (x-1)\,3^x = 10x^2 + 13x + 4$$

Bencze Mihály (Brassó)

Megoldás: Redukáljuk 0-ra az egyenletet!

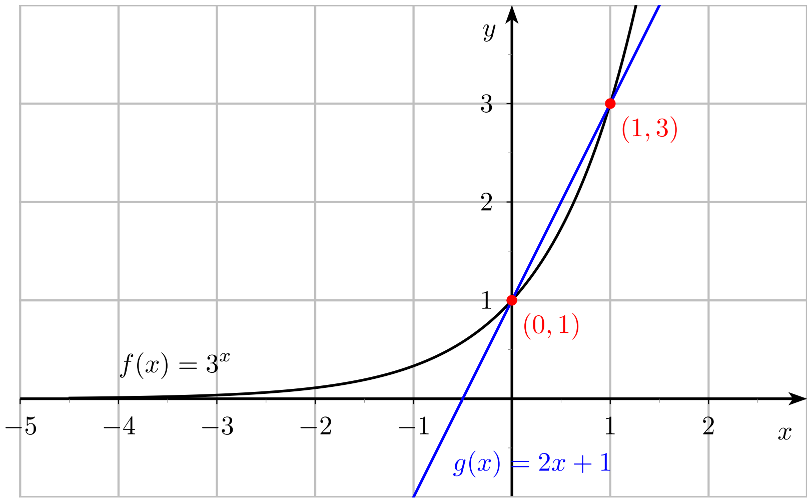
$$3^{2x+1} - (x-1)\,3^x - \left(10x^2 + 13x + 4\right) = 0$$

A bal oldalt szorzattá alakítjuk a másodfokú polinom gyöktényezős alakjára vonatkozó tétel alkalmazásával:

$$\begin{aligned}
&3^{2x+1} - (x-1)\,3^x - 10\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{4}{5}\right) = 0\\
&3\,(3^x)^2 - (x-1)\,3^x - (2x+1)\,(5x+4) = 0\\
&3\,(3^x)^2 - 3\,(2x+1)\,3^x + (5x+4)\,3^x - (2x+1)\,(5x+4) = 0\\
&3^{x+1}[3^x - (2x+1)] + (5x+4)\,[3^x - (2x+1)] = 0\\
&[3^x - (2x+1)] \cdot [3^{x+1} + (5x+4)] = 0.
\end{aligned}$$

1) $3^x = 2x + 1$

Grafikus megoldási mód alkalmazható.



Két megoldás van: $x_1 = 0, x_2 = 1$. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldások helyességéről.

2) $3^x + 1 = -5x - 4$

Az egyenlet bal oldalán szigorúan monoton növekedő, a jobb oldalán szigorúan monoton csökkenő függvény áll. Ebből következően az egyenletnek legfeljebb egy megoldása lehet. Ez a megoldás az $x_3 = -1$, aminek helyességéről behelyettesítéssel meggyőződhetünk.

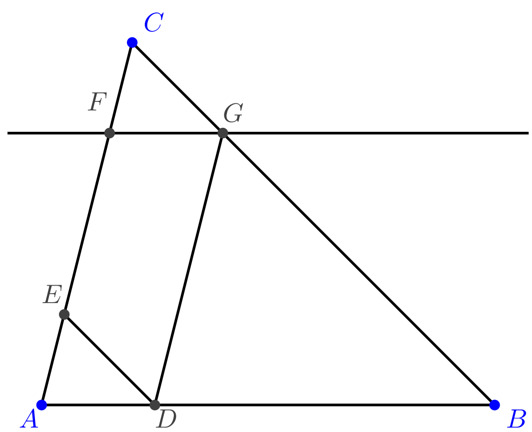
Így az egyenlet megoldáshalmaza: $\{-1; 0; 1\}$.

---

4. feladat: Az ABC háromszög AB oldalán vegyük fel a D pontot, AC oldalán pedig az E és F pontokat úgy, hogy $\frac{AE}{AC} = \frac{CF}{AC} = \frac{AD}{AB}$ teljesüljön! Az F ponton keresztül húzzunk párhuzamost az AB oldallal, messe ez a párhuzamos a BC oldalt a G pontban! Mely D, E, F pontok esetén lesz a $DEFG$ négyszög területe a lehető legnagyobb?

Nemecskó István (Budapest)

4. feladat megoldása: A párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt ED párhuzamos BC-vel. Hasonló okok miatt DG párhozamos AC-vel, így az $ADGF$ négyszög paralelogramma, amiből következik, hogy $FG = AD$. Ebből következően az ADE és FGC háromszögek egybevágóak. Ugyanakkor $ABC_\triangle \sim FGC_\triangle \sim DBG_\triangle \sim ADE_\triangle$, oldalaik párhuzamosak.



Legyen: $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{CF}{AC}=\dfrac{AD}{AB}=x$! Annak a feltétele, hogy $DEFG$ négyszög létrejöjjön: $x<1/2$. Ekkor $\dfrac{T_{ADE}}{T_{ABC}}=\dfrac{T_{FGC}}{T_{ABC}}=x^2$. Mivel $DB=AB-AD=AB\cdot(1-x)$, így $\dfrac{T_{DBG}}{T_{ABC}}=(1-x)^2$.

$$T_{DEFG}=T_{ABC}-T_{ADE}-T_{FGC}-T_{DBG}=T_{ABC}\cdot\left(1-2x^2-(1-x)^2\right)=$$

$$=T_{ABC}\cdot\left(-3x^2+2x\right)=T_{ABC}\cdot\left(-3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\right).$$

Tehát akkor lesz a keresett terület maximális, ha D,E és F pontok a megfelelő oldalak harmadoló pontjai. A maximális terület az ABC háromszög területének a harmada.

---

5. feladat: Mely n pozitív egész számok esetén osztható az $1^n+2^n+3^2+4^n+5^n+6^n+7^n+8^n$ összeg 5-tel?

Oláh György (Révkomárom)

5. feladat megoldása: Bármely pozitív egész n esetén érvényesek a következők:

$$8^n=(5+3)^n=5k_1+3^n$$
$$7^n=(5+2)^n=5k_2+2^n$$
$$6^n=(5+1)^n=5k_3+1$$

Ha n páratlan, akkor

$$4^n=(5-1)^n=5k_4-1$$
$$3^n=(5-2)^n=5k_5-2^n$$
$$2^n=(5-3)^n=5k_6-3^n$$

Ha n páros, akkor

$$4^n=(5-1)^n=5k_7+1$$
$$3^n=(5-2)^n=5k_8+2^n.$$

Páratlan n esetén a vizsgált összeg:

$$1^n+2^n+3^2+4^n+5^n+6^n+7^n+8^n=5K+(1-3^n-2^n-1+1+2^n+3^n)=5K+1,$$

azaz nem osztható 5-tel.
Páros n esetén az összeg:

$$1^n+2^n+3^2+4^n+5^n+6^n+7^n+8^n=5M+(1+2^n+2^n+1+1+2^n+3^n)=5K+1.$$

Mivel $n+2$ páros, ezért 2^{n+2} 4-re vagy 6-ra végződő szám, ami azt jelenti, hogy 5-tel osztva 1 vagy 4 maradékot ad. Ebből viszont következik, hogy 5-ös maradéka 2 vagy 4, tehát a tekintett összeg egyetlen páros n esetén sem osztható 5-tel.
Összegezve: A vizsgált összeg egyetlen pozitív egész n esetén sem osztható 5-tel.

---

6. feladat: Aladár és Béla a következő játékot játsszák: a táblára felírják az $1,2,\ldots,2012$ számokat, melyek közül felváltva törölnek le egy-egy számot. Aladár kezd. A játék akkor ér véget, amikor két szám marad a táblán. Ha ezek különbségének abszolútértéke egy előre megadott rögzített pozitív egész k számnál nagyobb prímszám, akkor Béla nyer, egyébként pedig Aladár nyer. Döntsük el, hogy k értékétől függően melyik játékosnak van nyerő stratégiája!

Borbély József (Tata)

6. feladat megoldása: Be fogjuk bizonyítani, hogy ha $1 \leq k \leq 996$, akkor Bélának, minden más esetben pedig Aladárnak van nyerő stratégiája.
Legyen először k egy 996-nál nem nagyobb pozitív egész szám! Bebizonyítjuk, hogy Béla tud úgy játszani, hogy a táblán maradó két szám abszolútértékének különbsége egy 996-nál nagyobb prímszám legyen.
Állítsuk párba az $\{1, 2, 3, \ldots, 2012\}$ halmaz elemeit az alábbi szabály szerint:
Minden $\{1, 2, \ldots, 9\}$-beli i szám párja legyen $i + 2003$, és minden $\{10, 11, 12, \ldots, 1006\}$-beli j szám párja legyen $j + 997$.
Ezzel $\{1, 2, 3, \ldots, 2012\}$ halmaz elemeit 1006 db diszjunkt párba rendeztük, ahol minden páron belül a számok különbségének abszolútértéke egy 996-nal nagyobb prímszám. Ezek után Béla játsszon a következő módon: ha Aladár letöröl egy számot, akkor Béla törölje le ennek a számnak a párját a következő lépésben. Ily módon végül két olyan szám marad a táblán, melyek párok voltak, így Béla nyer.
Most legyen $997 \leq k$. Megmutatjuk, hogy ekkor Aladárnak van nyerő stratégiája. Vegyük észre, hogy a $998, 999, 1000, 1001, 1002, 1003, 1004, 1005, 1006$ számok egyike sem prím, mert $3|999, 7|1001, 17|1003, 5|1005$ és $2|998, 1000, 1002, 1004, 1006$.
Emiatt Béla $997 \leq k$ esetén csak úgy nyerhetne, ha a két megmaradó szám különbségének abszolútértéke egy 1006-nal nagyobb prímszám lenne.
Játsszon Aladár a következő módon: minden lépésben törölje le a legkisebb számot, ami a táblán szerepel. Mivel összesen 1005 db számot töröl le, ezért Aladár ilyen stratékiája mellett amegmaradó két szám eleme az $\{1006, 1007, \ldots, 1012\}$ halmaznak, tehát így Béla semmiképpen sem nyerhet.