XXI. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Kecskemét, 2012. március 14–18.

10. osztály

1. feladat: Van-e olyan egész együtthatós $P(x)$ polinom, amelyre $P(0) = 12, P(1) = 20$ és $P(2) = 2012$?

Pintér Ferenc (Nagykanizsa)

Megoldás: Mivel a polinom három helyettesítési értéke adott, vizsgáljuk meg, hogy létezik-e megfelelő másodfokú polinom; ha van, akkor az egyértelmű. Az egyszerűbb számolás végett keressük a polinomot

$$P(x) = ax(x-1) + bx + c$$

alakban! (Így az $x = 1$ helyettesítés egyszerűbb egyenletet fog eredményezni.)

Ekkor

$$P(0) = c = 12 \qquad (1)$$
$$P(1) = b + c = 20 \qquad (2)$$
$$P(2) = 2a + 2b + c = 2012 \qquad (3)$$

(1) és (2) összevetésével $b = 8$; a két másik együttható ismeretében (3)-ból $a = 992$.

Így a $P(x) = 992x(x-1) + 8x + 12 = 992x^2 - 984x + 12$ megfelel a feltételeknek. Ezzel a feladat kérdését megválaszoltuk.

Megjegyzés. Természetesen vannak megfelelő magasabb fokszámú polinomok is. Egy ilyen harmadfokú polinom például a $P(x) = 330x^3 + 2x^2 - 324x + 12$.

---

2. feladat: Határozzuk meg mindazokat a p, q, r prímszámokat, amelyekre

$$pqr < pq + qr + rp\,!$$

Oláh György (Révkomárom)

Megoldás: A bizonyítandó egyenlőtlenség mindkét oldalát osszuk el a pozitív pqr szorzattal:

$$\frac{pq + qr + rp}{pqr} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1.$$

Nem megy az általánosság rovására, ha feltételezzük, hogy $p \le q \le r$.

Ha $p = q = 2$, akkor r tetszőleges prímszám lehet, azaz ekkor végtelen sok megfelelő rendezett prímhármas van.

Ha $p = 2$, $q = 3$, akkor $\frac{1}{r} > \frac{1}{6}$, aminek $r = 3$ és $r = 5$ felelnek meg.

Ha $p = 2$, $q > 3$, akkor $\frac{3}{10} < \frac{1}{r} \le \frac{1}{5}$, ami ellentmondás, tehát ekkor nincs megoldás.

Ha $p \ge 3$, akkor $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \le 1$, azaz ebben az esetben sincs megoldás.

Összefoglalva a megoldások: $(2; 2; r)$ (r tetszőleges prím), $(2; 3; 3)$, $(2; 3; 5)$. Mivel a feltételben p, q és r szerepe azonos, ezen hármasok bármely permutációja megoldás.

---

3. feladat: Mely n pozitív egész számok esetén lesz az n^2+n+19 kifejezés értéke négyzetszám?

Kacsó Ferenc (Marosvásárhely)

I. megoldás: Legyen

$$n^2+n+19=m^2, \tag{4}$$

ahol m pozitív egész szám! Szorozzuk meg a (4) egyenlet mindkét oldalát 4-gyel, majd végezzünk átalakításokat.

$$4n^2+4n+76=4m^2$$
$$(2m)^2-(2n+1)^2=75$$
$$(2m-2n-1)(2m+2n+1)=75$$

Legyen

$$2m-2n-1=a \quad \text{és} \quad 2m+2n+1=b, \tag{5}$$

ahol $0<a<b$ egészek, és

$$ab=75 \tag{6}$$

Az (5) egyenletrendszer megoldása n-re és m-re:

$$n=\frac{b-a-2}{4}, \quad m=\frac{a+b}{4}.$$

A (6) feltételnek megfelelő $(a;b)$ párok: $(1;75)$, $(3;25)$, $(5;15)$. Ennek megfelelően a (4) egyenlet megoldásai a következő $(n;m)$ számpárok: $(18;19)$, $(5;7)$, $(2;5)$.

Az adott kifejezés tehát $n=2$, $n=5$ és $n=18$ esetén vesz fel négyzetszám értéket.

II. megoldás: Mivel $n^2+n+19>n^2$, a következő egyenletet kell megoldanunk:

$$n^2+n+19=(n+k)^2, \tag{7}$$

ahol k pozitív egész szám.

A (7) egyenletet átalakítva:

$$19-k^2=n(2k-1).$$

Mivel $19-k^2>0$, ezért k lehetséges értékei 1, 2, 3 és 4.

$k=1$-re $n=18$, $k=2$-re $n=5$, $k=3$-ra $n=2$. $k=4$ esetén n-re nincs pozitív egész megoldás.

Az adott kifejezés tehát $n=2$, $n=5$ és $n=18$ esetén vesz fel négyzetszám értéket.

---

4. feladat: Határozzuk meg az

$$E=\frac{2x}{3y+4z}+\frac{3y}{4z+2x}+\frac{4z}{2x+3y}$$

kifejezés legkisebb értékét, ha x, y és z pozitív valós számok!

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

I. megoldás: Legyen $3y+4z=a$, $4z+2x=b$, $2x+3y=c$.

Ekkor

$$x=\frac{b+c-a}{4}, \quad y=\frac{c+a-b}{6}, \quad z=\frac{a+b-c}{8}$$

és

$$E=\frac{b+c-a}{2a}+\frac{c+a-b}{2b}+\frac{a+b-c}{2c}.$$

Alakítsuk és becsüljük E-t. Felhasználjuk, hogy pozitív szám és reciprokának összege legalább 2, és pontosan akkor 2, ha a szám az 1.

$$\begin{aligned}E&=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-1+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}-1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-1\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)-3\right)\geq\frac{1}{2}(2+2+2-3)=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

E legkisebb értéke tehát $\frac{3}{2}$, és ezt akkor veszi fel, ha $a=b=c$, vagyis ha $2x=3y=4z$, ami azt jelenti, hogy az x, y, z számok fordított arányban állnak a 2, 3, 4 számokkal.

II. megoldás: Legyen $a=2x$, $b=3y$, $c=4z$. Ezzel

$$E=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}.$$

Ha $b+c=p$, $a+c=q$, $a+b=r$, akkor

$$E=\frac{q+r-p}{2p}+\frac{r+p-q}{2q}+\frac{p+q-r}{2r}.$$

Ez pontosan az I. megoldásban bemutatott alak, amelyről az ott leírt módon belátható, hogy minimuma $\frac{3}{2}$, és ezt akkor veszi fel, ha $p=q=r$, vagyis ha $b+c=a+c=a+b$, azaz $a=b=c$, tehát $2x=3y=4z$, ami azt jelenti, hogy az x, y, z számok fordított arányban állnak a 2, 3, 4 számokkal.

Megjegyzés. Az egyenlőtlenség $2x=a$, $3y=b$, $4z=c$ alakban Nesbitt-egyenlőtlenség néven ismert.

---

5. feladat: Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AC=BC$, az AB alap felezőpontja D, az A és a D pontból a BC szakaszra bocsátott merőlegesek talppontja rendre a BC szakasz E, illetve F belső pontja. A DF szakasz G felezőpontját a C ponttal összekötő szakasz és az AF szakasz metszéspontja H. Igazoljuk, hogy a H pont az AC szakasz mint átmérő fölé írt Thalész-körön van!

Bíró Bálint (Eger)

Megoldás: A DF és AE egyenesek párhuzamosak, hiszen mindkettő merőleges BC-re, és mivel D az AB oldal felezőpontja, DF középvonal az ABE háromszögben, így F felezőpontja az EB szakasznak. A $ABE\triangle$ és a $DBF\triangle$ háromszögek hasonlók, a hasonlóság aránya $2:1$.

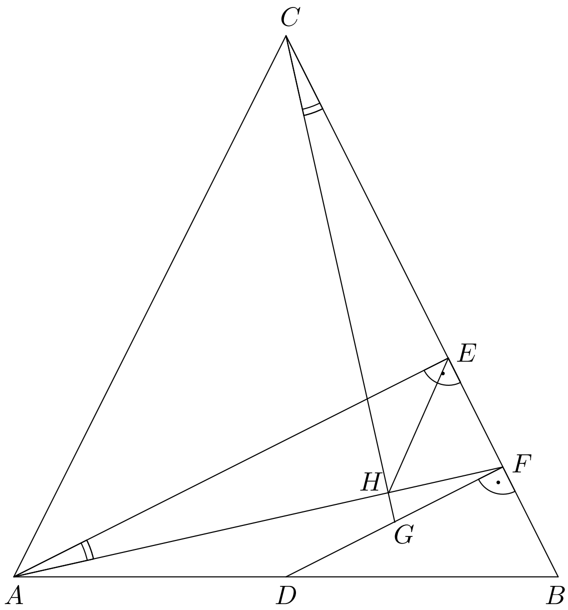
A DF szakasz a BCD derékszögű háromszög átfogójához tartozó magassága, ez pedig – mint ismeretes – két hasonló háromszögre bontja a $BCD\triangle$-et, tehát $DBF\triangle\sim CDF\triangle$.

A hasonlóság tranzitivitása miatt $ABE\triangle\sim CDF\triangle$, a megfelelő oldalak aránya tehát egyenlő:

$$\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FD}.$$

Mivel $FD=2FG$ és $EB=2EF$, ezért

$$\frac{AE}{EF}=\frac{CF}{FG}\tag{8}$$



Az 5. feladathoz.

A (8) egyenlőség szerint $AEF\triangle$ és $CFG\triangle$ két-két oldalának aránya megegyezik, és mivel ezen háromszögekben az E, illetve az F csúcsnál derékszög van, a két háromszög hasonló.

Emiatt a megfelelő szögek egyenlők, tehát $FAE\sphericalangle = GCF\sphericalangle = HCF\sphericalangle$.

Az A és C pontok az EH egyenes azonos oldalán vannak (mert H és C az AE egyenes különböző oldalain vannak), az előzőek szerint pedig az A és C pontokból az EH szakasz egyenlő nagyságú szögben látszik, így az A, H, E és C pontok egy körre illeszkednek. Mivel az AEC háromszög derékszögű, ezért ez a kör az AC szakasz Thalész-köre (azaz az AH és CH, vagyis az AF és CG egyenesek merőlegesek).

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

---

6. feladat: Az első 2012 darab pozitív egész szám mindegyikét átírjuk hármas számrendszerbe. Hány palindrom szám van a kapott 2012 darab hármas számrendszerbeli szám között? (Palindrom számon olyan pozitív egész számot értünk, amelynek számjegyeit fordított sorrendben írva az eredeti számot kapjuk vissza.)

Kosztolányi József (Szeged)

Megoldás: Mivel $3^6 = 729 < 2012 < 2187 = 3^7$, ezért a vizsgált pozitív egészek a hármat számrendszerben legfeljebb hétjegyűek.

Két egyjegyű palindrom van: az 1 és a 2. Kétjegyűből is kettő van: 11 és 22.

Ha $n \geq 1$, akkor a $2n$ jegyű hármas számrendszerbeli palindrom számokból úgy kapjuk a $2n+1$ jegyű palindrom számokat, hogy az első n jegy után (középre) beírjuk a 0, 1, 2 számjegyek valamelyikét.

A $2n$ jegyű hármas számrendszerbeli palindrom számokból hasonlóan kapjuk a $2n + 2$ jegyű palindrom számokat is: itt 00-t, 11-et vagy 22-t írunk be középre.

Ezek alapján Háromjegyű és négyjegyű palindrom számokból is 6 darab van, öt- és hatjegyűből 18, hétjegyűből pedig 54 darab.

Mivel $2012 = 2202112$, ezért a hétjegyű palindrom számok közül az ennél nagyobbak már nincsenek benne az alaphalmazban, ez összesen 6 darab szám: 2210122, 2211122, 2212122, 2220222, 2221222, 2222222.

Így az első 2012 darab pozitív egész közül a hármas számrendszerben palindromok száma: $2 + 2 + 6 + 6 + 18 + 18 + 54 - 6 = 100$.