XX. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Bonyhád, 2011. március 11–15.

12. osztály

1. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b,c pozitív valós számok kielégítik az

$$5abc > a^3 + b^3 + c^3$$

egyenlőtlenséget, akkor létezik a, b, c oldalú háromszög.

Oláh György (Komárom)

2. feladat: Legyen a_n ($n \in \mathbb{N}^+$) az $\sqrt{n}$-hez legközelebbi egész szám. (Ha n négyzetszám, akkor $a_n = \sqrt{n}$.) Mennyi az

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{2011}}$$

összeg értéke?

Kántor Sándor (Debrecen)

3. feladat: Az ABC háromszögbe írható kör O középpontjára illeszkedő e egyenes az AB és AC oldalakat M és N pontokban metszi. D és E a BO és CO egyenesek olyan pontjai, amelyre $ND \parallel ME \parallel BC$. Igazoljuk, hogy az A, D és E pontok egy egyenesre illeszkednek.

Katz Sándor (Bonyhád)

4. feladat: Az ABC háromszög A csúcsához tartozó magasságának a BC oldal egyenesén levő talppontja D. A B és C pontokból az A csúcsból induló belső szögfelezőre bocsátott merőlegesek talppontjai rendre E és F. Az EF és BC szakaszok metszéspontja M. Legyen az ABC háromszög területe T, a DEF háromszög területe t.

Bizonyítsuk be, hogy

$$\sqrt{\frac{t}{T}} = \frac{FM \cdot BM \cdot DE}{EM \cdot CM \cdot AB}.$$

Bíró Bálint (Eger)

5. feladat: Adott egy tetszőleges poliéder. Lehet-e a csúcsaiba pozitív egész számokat írni a következő módon:

ha él köt össze két csúcsot, akkor a csúcsokba írt számok relatív prímek;

ha két csúcs nincs éllel összekötve, akkor a csúcsokba írt számok legnagyobb közös osztója 1-nél nagyobb?

Kántor Sándor (Debrecen)

6. feladat: Létezik-e olyan négyzetszám, amelynek a számjegyeinek összege 2011^{2010}?

Szabó Magda (Szabadka)