XX. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Bonyhád, 2011. március 11–15.

12. osztály

1. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b,c pozitív valós számok kielégítik az

$$5abc > a^3 + b^3 + c^3$$

egyenlőtlenséget, akkor létezik a, b, c oldalú háromszög.

Oláh György (Komárom)

Megoldás: Az állítást indirekten bizonyítjuk: feltesszük, hogy valamely a, b, c valós számokra igaz az egyenlőtlenség, de ne nem létezik a, b, c oldalú háromszög.

Ez azt jelenti, hogy az a, b, c számokra legalább egy háromszög-egyenlőtlenség nem érvényes.

Nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy $c \geq a + b$, vagyis $c = a + b + x$, ahol $x \geq 0$.

Az eredeti egyenlőtlenségbe való behelyettesítés után kapjuk:

$$5ab(a + b + x) > a^3 + b^3 + (a + b)^3 + 3x(a + b)^2 + 3(a + b)x^2 + x^3.$$

Rendezünk:

$$\begin{aligned}
2a^2b + 2ab^2 &> 2a^3 + 2b^3 + abx + 3\left(a^2 + b^2\right)x + 3(a + b)x^2 + x^3 \\
0 &> 2a^3 + 2b^3 - 2a^2b - 2ab^2 + abx + 3\left(a^2 + b^2\right)x + 3(a + b)x^2 + x^3 \\
0 &> 2a^2(a - b) + 2b^2(b - a) + abx + 3\left(a^2 + b^2\right)x + 3(a + b)x^2 + x^3 \\
0 &> 2(a - b)\left(a^2 - b^2\right) + abx + 3\left(a^2 + b^2\right)x + 3(a + b)x^2 + x^3 \\
0 &> 2(a - b)^2(a + b) + abx + 3\left(a^2 + b^2\right)x + 3(a + b)x^2 + x^3
\end{aligned}$$

A jobb oldalon minden tag nemnegatív, így ellentmondásra jutottunk, tehát létezik a, b, c oldalú háromszög.

---

2. feladat: Legyen a_n ($n \in \mathbb{N}^+$) az $\sqrt{n}$-hez legközelebbi egész szám. (Ha n négyzetszám, akkor $a_n = \sqrt{n}$.) Mennyi az

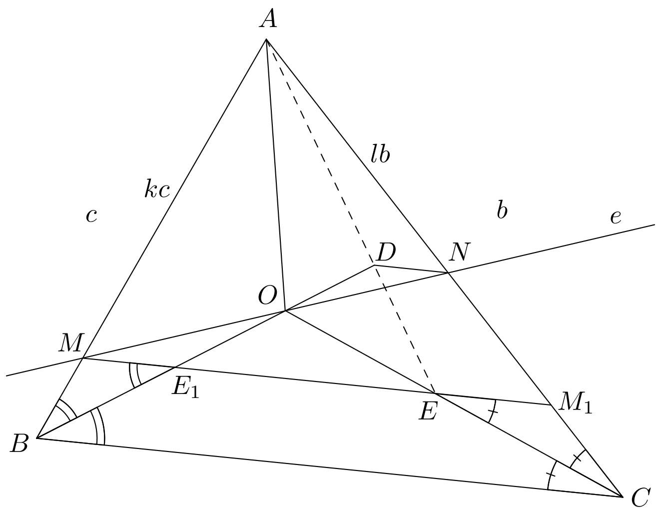
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{2011}}$$

összeg értéke?

Kántor Sándor (Debrecen)

Megoldás: Legyenek k és n olyan pozitív egész számok, amelyekre

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 < n < \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{és} \quad n < 2011,$$



A 3. feladathoz.

így

$$k^2 - k + \frac{1}{4} < n < k^2 + k + \frac{1}{4},$$

azaz

$$k^2 - k < n \leq k^2 + k.$$

Megjegyezzük, hogy a bal oldalon továbbra sem jöhet létre egyenlőség.

Tehát az $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{2011}}$ összegben $\frac{1}{k}$ értéke $\left(k^2 + k\right) - \left(k^2 - k\right) = 2k$-szor fordul elő. Ezek összege

$$2k \cdot \frac{1}{k} = 2.$$

Mivel $2011 = 44^2 + 44 + 31$, ezért az eddigiek értelmében

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{2011}} = 44 \cdot 2 + 31 \cdot \frac{1}{45}.$$

---

3. feladat: Az ABC háromszögbe írható kör O középpontjára illeszkedő e egyenes az AB és AC oldalakat M és N pontokban metszi. D és E a BO és CO egyenesek olyan pontjai, amelyre $ND \parallel ME \parallel BC$. Igazoljuk, hogy az A, D és E pontok egy egyenesre illeszkednek.

Katz Sándor (Bonyhád)

Megoldás: Használjuk a háromszögekben általánosan megszokott jelöléseket; legyen O a beírható kör középpontja.

Az ME egyenes messe az OB egyenest E_1-ben, az AC oldalt M_1-ben!

Legyen $AM = kc$ és $AN = lb$; hasonlóság szerint $AM_1 = kb$, hiszen $BC \parallel MM_1$.

Az ABC háromszög szögfelezője a B-nél lévő β szöget két egyenlő részre osztja; mivel $BC \parallel MM_1$, így $ME_1B\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$. Ezért a $BME_1\triangle$ egyenlő szárú: $MB = ME_1 = (1 - k)c$. Ezzel megegyező gondolatmenet szerint kapjuk, hogy $M_1C = M_1E = (1 - k)b$.

Az $AMN\triangle$-ben felírva a szögfelezőtételt:

$$\frac{MO}{ON} = \frac{kc}{lb}. \tag{1}$$

$DNO\triangle \sim ME_1O\triangle$, mert oldalaik párhuzamosak. A hasonlóságból következően és (1) felhasználásával

$$\frac{DN}{ME_1} = \frac{ON}{OM} = \frac{lb}{kc}. \tag{2}$$

(2) szerint

$$\frac{DN}{AN} = \frac{DN}{lb} = \frac{ME_1}{kc} = \frac{1-k}{k}.$$

De $\frac{EM_1}{AM_1} = \frac{1-k}{k}$, ezért pedig $ADN\triangle \sim AEM_1\triangle$, mert két oldaluk aránya és (a párhuzamosság miatt) egy szögük megegyezik.

Ezért az A csúcsnál lévő szögük is megegyezik, tehát A, D és E kollineárisak.

---

4. feladat: Az ABC háromszög A csúcsához tartozó magasságának a BC oldal egyenesén levő talppontja D. A B és C pontokból az A csúcsból induló belső szögfelezőre bocsátott merőlegesek talppontjai rendre E és F. Az EF és BC szakaszok metszéspontja M. Legyen az ABC háromszög területe T, a DEF háromszög területe t.

Bizonyítsuk be, hogy

$$\sqrt{\frac{t}{T}} = \frac{FM \cdot BM \cdot DE}{EM \cdot CM \cdot AB}.$$

Bíró Bálint (Eger)

Megoldás: A feltételeknek megfelelő ábrát készítünk.

Az AB szakasz a D és E pontokból derékszögben látszik, ezért D és E rajta van az AB mint átmérő fölé írt Thalész-körön. Ebből az is következik, hogy $ABED$ húrnégyszög. Hasonlóképpen mivel az AC szakasz a D és F pontokból derékszögben látszik, ezért D és F illeszkedik az AC Thalész-körére, és ezért $ACDF$ húrnégyszög.

Mivel $ABED$ húrnégyszög, ezért $DEF\sphericalangle = DEA\sphericalangle = DBA\sphericalangle$, mert az utóbbi két szög az AD húrhoz tartozó kerületi szög. $ACDF$ is húrnégyszög, amelynek szemben fekvő szögei $180°$-ra egészítik ki egymást, azaz $ACD\sphericalangle + DFA\sphericalangle = 180°$.

A $DFA\sphericalangle$ és $DFE\sphericalangle$ szögek ugyancsak $180°$-ra egészítik ki egymást, így $ACD\sphericalangle = ACB\sphericalangle = DFE\sphericalangle$.

A DEF és ABC háromszögekben tehát két-két szög, mégpedig a $DEF\sphericalangle = CBA\sphericalangle$ és a $DFE\sphericalangle = ACB\sphericalangle$ szögek nagysága egyenlő, ezért a harmadik szögek mértéke is azonos, vagyis a két háromszög hasonló: $DEF\triangle \sim ABC\triangle$.

Hasonló háromszögek területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő, ezért

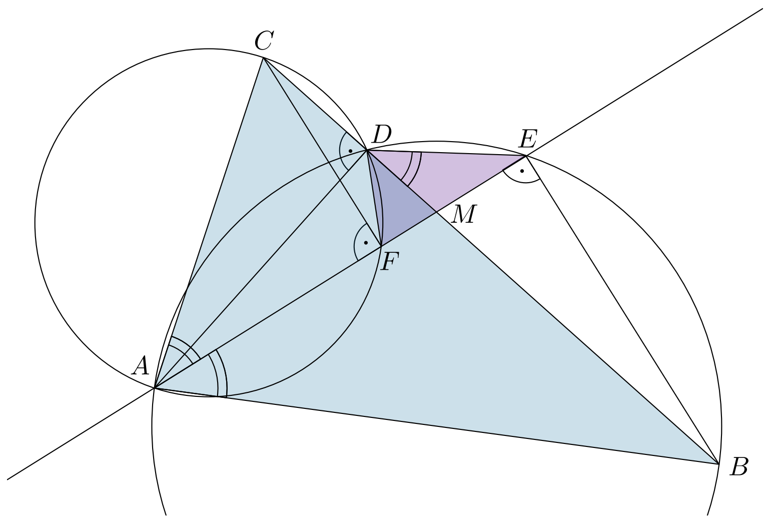
$$\frac{t}{T} = \left(\frac{FD}{AC}\right)^2,$$

ebből pedig

$$\sqrt{\frac{t}{T}} = \frac{FD}{AC}$$

következik.

A DEF és ABC háromszögekben tehát $EDF\sphericalangle = BAC\sphericalangle$.



A 4. feladathoz.

Viszont az $ABED$ húrnégyszögben az $EDB\sphericalangle$ és az $EAB\sphericalangle$ azonos íven nyugvó kerületi szögek, tehát egyenlők. A feltétel szerint az AE egyenese felezi a $BAC\sphericalangle$-et, így

$$EAB\sphericalangle = \frac{BAC\sphericalangle}{2} = \frac{EDF\sphericalangle}{2} = EDB\sphericalangle,$$

ez pedig éppen azt jelenti, hogy a BC egyenes felezi az EDF szöget.

Felírjuk a szögfelezőtételt az $ABC\triangle$-ben:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CM}{BM} \implies AC = \frac{AB \cdot CM}{BM}. \tag{3}$$

A $DEF\triangle$-ben is felírjuk a szögfelezőtételt:

$$\frac{FD}{DE} = \frac{FM}{EM} \implies FD = \frac{DE \cdot FM}{EM}. \tag{4}$$

(3) és (4) eredményét a $\sqrt{\frac{t}{T}}$-re vonatkozó képletbe való beírásával kapjuk a bizonyítandó állítást:

$$\sqrt{\frac{t}{T}} = \frac{FD}{AC} = \frac{FM \cdot BM \cdot DE}{EM \cdot CM \cdot AB}.$$

---

5. feladat: Adott egy tetszőleges poliéder. Lehet-e a csúcsaiba pozitív egész számokat írni a következő módon:

ha él köt össze két csúcsot, akkor a csúcsokba írt számok relatív prímek;

ha két csúcs nincs éllel összekötve, akkor a csúcsokba írt számok legnagyobb közös osztója 1-nél nagyobb?

Kántor Sándor (Debrecen)

Megoldás: Az elhelyezés lehetséges, ennek bizonyítását egy, a feltételeknek megfelelő elhelyezés megadásával végezzük. Az elhelyezés során számokat fogunk írni a csúcsokba és a végső értéket a beírt számok szorzata fogja jelenteni.

Először vegyük a csúcsokat valamilyen sorrendben és az első csúcsra írjuk az első prímszámot (2-t), a második csúcsra a második prímszámot (3-at), és így tovább a többi csúcsra. Ez véges sok lépés után véget ér.

Ezek után vegyük az első olyan párt, amelyiket nem köt össze él és mindkét csúcsba írt aktuális számot szorozzuk meg a soron következő prímszámmal. Majd vegyük a következő össze nem kötött párt, és folytassuk ezt az eljárást. Ez is véges sok lépés után véget ér.

A feltételek teljesülnek:

- Ha él köt össze két csúcsot, akkor azokban csupa különböző prímszámot szoroztunk össze, hiszen közös prímosztó csak akkor kerülhetne mind a kettőbe, ha nem lennének összekötve.
- Ha nem köt össze él két csúcsot, akkor van olyan prím, ami mind a kettőben szerepel, tehát a legnagyobb közös osztójuk biztosan nem 1.

Tehát ez az elhelyezés kielégíti a feltételeket.

---

6. feladat: Létezik-e olyan négyzetszám, amelynek a számjegyeinek összege 2011^{2010}?

Szabó Magda (Szabadka)

I. megoldás: Megmutatjuk, hogy létezik olyan szám.

Tekintsük az $x = 2 \cdot 10^k - 1$ alakú számokat, ahol k pozitív egész szám.

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(2 \cdot 10^k - 1\right)^2 = 4 \cdot 10^{2k} - 4 \cdot 10^k + 1 \\ &= 4\underbrace{00\ldots0}_{2k} - 4\underbrace{00\ldots0}_{k} + 1 = 3\underbrace{99\ldots9}_{k-1}6\underbrace{00\ldots0}_{k-1}1 \end{aligned}$$

Eszerint x^2 számjegyeinek összege $3 + (k-1) \cdot 9 + 6 + 1 = 9k + 1$.

Ha k értékét egyesével növeljük, akkor a számjegyek összege minden lépésben 9-cel fog nőni, ezért minden $9n + 1$ alakú értéket fel fog venni.

Most megmutatjuk, hogy $2011^{2010} \equiv 1 \pmod 9$, azaz x^2 számjegyeinek összege ezt az értéket is felveszi.

$$2011^3 \equiv 4^3 \equiv 64 \equiv 1 \pmod 9$$

$$2011^{2010} \equiv \left(2011^3\right)^{670} \equiv 1^{670} \equiv 1 \pmod 9$$

Tehát 2011^{2010} valóban $9n+1$ alakú szám, így x^2 számjegyeinek összege ennyi lesz valamely k-ra.

II. megoldás: Tekintsük az

$$y = \underbrace{33\ldots3}_{k-1}2 = \frac{10^k - 4}{3}$$

számokat, ahol k pozitív egész szám. Ekkor

$$\begin{aligned} y^2 &= \underbrace{33\ldots3}_{k-1}2^2 = \left(\frac{10^k-4}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}\left(10^{2k}-8\cdot 10^k+16\right) \\ &= \frac{1}{9}\left(10^{2k}\right) - 8\cdot\frac{1}{9}\left(10^k-1\right)+1 = \underbrace{11\ldots1}_{2k} - \underbrace{88\ldots8}_{k} + 1 \\ &= \underbrace{11\ldots1}_{k-1}0\,\underbrace{22\ldots2}_{k-1}4 \end{aligned}$$

Így y^2 számjegyeinek összege $(k-1)\cdot 1 + 0 + (k-1)\cdot 2 + 4 = 3k+1$.

Ha k értékét egyesével növeljük, akkor a számjegyek összege minden lépésben 3-mal fog nőni, tehát minden $3n+1$ alakú értéket fel fog venni. 2011^{2010}-ről pedig az *I. megoldás* végén megmutattuk, hogy $9n+1$ alakú szám, tehát $3n+1$ alakú szám is.

Így y^2 számjegyeinek összege valamely k-ra 2011^{2010} lesz.