XX. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Bonyhád, 2011. március 11–15.

11. osztály

1. feladat: Igazoljuk, hogy

$$\frac{2}{1+2^2}+\frac{2^2}{1+2^{2^2}}+\dots\frac{2^n}{1+2^{2^n}}<\frac{2}{3}$$

bármely $n \geq 1$ természetes szám esetén.

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

Megoldás: Az összeg tagjai $\frac{2^k}{1+2^{2^k}}$ alakúak, ezt alakítjuk át:

$$\begin{aligned}
\frac{2^k}{1+2^{2^k}} &= \frac{2^k\cdot\left(2^{2^k}-1\right)}{\left(1+2^{2^k}\right)\left(2^{2^k}-1\right)} && \left(2^{2^k}-1\right)\text{-gyel való szorzással}\\
&= \frac{2^k\cdot 2^{2^k}-2^k}{\left(1+2^{2^k}\right)\left(2^{2^k}-1\right)} && \text{a szorzás elvégzésével a számlálóban}\\
&= \frac{2^k\cdot 2^{2^k}+2^k-2^{k+1}}{\left(1+2^{2^k}\right)\left(2^{2^k}-1\right)} && -2^k=2^k-2^{k+1}\\
&= \frac{2^k\cdot\left(2^{2^k}+1\right)-2^{k+1}}{\left(1+2^{2^k}\right)\left(2^{2^k}-1\right)} && 2^k\ \text{kiemelésével}\\
&= \frac{2^k\cdot\left(2^{2^k}+1\right)}{\left(1+2^{2^k}\right)\left(2^{2^k}-1\right)}-\frac{2^{k+1}}{\left(1+2^{2^k}\right)\left(2^{2^k}-1\right)}\\
&= \frac{2^k}{2^{2^k}-1}-\frac{2^{k+1}}{2^{2^{k+1}}-1} && (a+b)(a-b)=a^2-b^2
\end{aligned}$$

Az átalakítást felhasználva:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{1+2^2}+\frac{2^2}{1+2^{2^2}}+\dots\frac{2^n}{1+2^{2^n}} &= \sum_{k=2}^{n}\frac{2^k}{1+2^{2^k}}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^k}{2^{2^k}-1}-\frac{2^{k+1}}{2^{2^{k+1}}-1}\right)\\
&= \frac{2}{3}-\frac{2^{n+1}}{2^{2^{n+1}}-1} && \text{teleszkópikus összeg}
\end{aligned}$$

Mivel $\frac{2^{n+1}}{2^{2^{n+1}}-1}>0$,

$$\frac{2}{1+2^2}+\frac{2^2}{1+2^{2^2}}+\dots\frac{2^n}{1+2^{2^n}}=\frac{2}{3}-\frac{2^{n+1}}{2^{2^{n+1}}-1}<\frac{2}{3}.$$

Az állítás általánosítható: ugyanezen lépéseket a

$$\frac{2}{1+p^2}+\frac{2^2}{1+p^{2^2}}+\dots\frac{2^n}{1+p^{2^n}}$$

összegre elvégezve kapjuk, hogy kisebb, mint $\frac{2}{p^2-1}$ $(p>1)$.

---

2. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$6\sqrt{x-2}+10\sqrt{2x+3}+12\sqrt{3x+3}=6x+74$$

egyenletet.

Olosz Ferenc (Szatmárnémeti)

Megoldás: Az egyenlet értelmezett, ha $x\in[2;\infty)$.
$6x+74$ részekre bontásával teljes négyzetek összegére bontjuk az egyenletet.

$$\begin{aligned} 6x+74 &= 6\sqrt{x-2}+10\sqrt{2x+3}+12\sqrt{3x+3}\\ 0 &= \left(x-2-6\sqrt{x-2}+9\right)+\left(2x+3-10\sqrt{2x+3}+25\right)+\left(3x+3-12\sqrt{3x+3}+36\right)\\ 0 &= \left(\sqrt{x-2}-3\right)^2+\left(\sqrt{2x+3}-5\right)^2+\left(\sqrt{3x+3}-6\right)^2 \end{aligned}$$

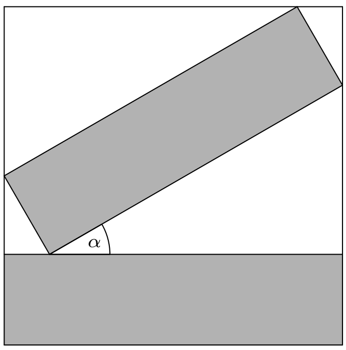
Ez a valós számok halmazán akkor és csak akkor lehetséges, ha

$$\sqrt{x-2}-3=0 \text{ és } \sqrt{2x+3}-5=0 \text{ és } \sqrt{3x+3}-6=0.$$

Mindhárom egyenlet egyetlen megoldása $x=11$, így az eredeti egyenletnek is ez a megoldása.

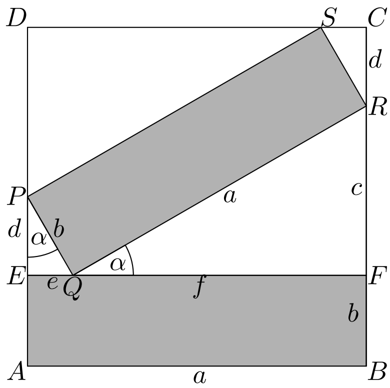
---

3. feladat: Egy négyzetbe az ábra szerint két egybevágó téglalapot írunk. Mekkora az α szög?



Katz Sándor (Bonyhád)

I. megoldás: $FQR\angle=EPQ\angle=\alpha$, mert a szögek merőleges szárúak. $EPQ\angle=CRS\angle=\alpha$, mert váltószögek. $EPQ\triangle\equiv CRS\triangle$, mert két szögük (a derékszög és α) megegyezik és a derékszöggel szemközti oldalak ugyanolyan hosszúak (b). Ezért az ábrán d-vel jelölt szakaszok egyenlők.



A 3. feladat I. megoldásához.

Az ábráról leolvasható, hogy

$$b + c + d = a \tag{1}$$

$$e + f = a \tag{2}$$

$EPQ\triangle \sim FQR\triangle$, mert szögeik megegyeznek. A hasonlóság miatt a megfelelő oldalak aránya egyenlő:

$$\frac{e}{b} = \frac{c}{a} \tag{3}$$

$$\frac{d}{b} = \frac{f}{a} \tag{4}$$

(1)-ből átrendezéssel és kiemeléssel

$$b\left(1 + \frac{d}{b}\right) = a\left(1 - \frac{c}{a}\right),$$

(4) felhasználásával pedig

$$b\left(1 + \frac{f}{a}\right) = a\left(1 - \frac{c}{a}\right). \tag{5}$$

(2)-ből átrendezéssel és kiemeléssel

$$a\left(1 - \frac{f}{a}\right) = e,$$

(3) felhasználásával

$$a\left(1 - \frac{f}{a}\right) = \frac{bc}{a}. \tag{6}$$

Szorozzuk össze (5)-öt és (6)-ot!

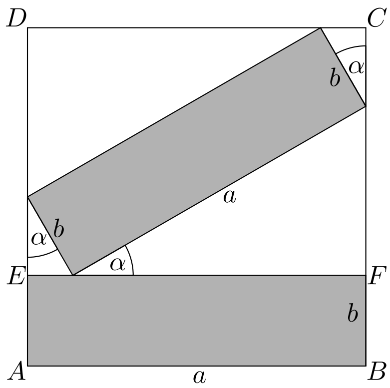
$$ab\left(1+\frac{f}{a}\right)\left(1-\frac{f}{a}\right)=a\cdot\frac{bc}{a}\cdot\left(1-\frac{c}{a}\right)$$
$$1-\frac{f^2}{a^2}=\frac{c}{a}-\frac{c^2}{a^2}$$
$$\frac{a^2-f^2}{a^2}=\frac{c}{a}-\frac{c^2}{a^2}$$
$$\frac{c^2}{a^2}=\frac{c}{a}-\frac{c^2}{a^2} \qquad \text{Pitagorasz-tétel } FQR\triangle\text{-re: } a^2-f^2=c^2$$
$$2\cdot\frac{c^2}{a^2}=\frac{c}{a}$$

$\frac{c}{a}\neq 0$, ezért $c=\frac{a}{2}$. Az $FQR\triangle$ derékszögű és az egyik befogó fele az átfogónak, ezért az említett befogóval szemközti szög, α, $30°$-os.

II. megoldás: Az ábrán jelölt szögek egyenlő nagyságúak, mert merőleges szárúak. Legyen a négyzet oldala a, a beírt téglalap másik oldala b.

Írjuk fel a BC oldalt az azt alkotó három szakasz összegeként!

$$b+a\cdot\sin\alpha+b\cdot\cos\alpha=a \tag{5}$$
$$b\cdot(1+\cos\alpha)=a\cdot(1-\sin\alpha) \tag{6}$$



A 3. feladat II. megoldásához.

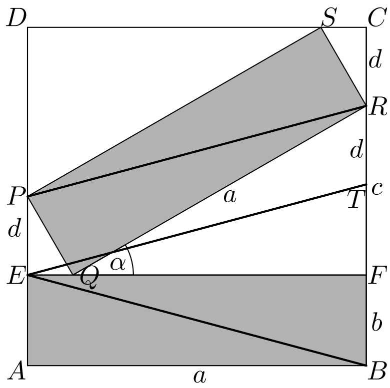
III. megoldás: Húzzuk be a két egybevágó téglalapban az EB és PR átlókat, ezek nyilván egyenlők.

Toljuk el a PR átlót a $CR=PE=d$ szakasszal, ekkor az ETB egyenlő szárú háromszöget kapjuk, amelyben az EF magasság felezi a TB alapot, tehát $TF=FB=b$. Így a BC oldalon $2b+2d=a$, ahonnan $b+d=c=\frac{a}{2}$.

Az RQF derékszögű háromszög RF befogója fele az RQ átfogónak, tehát $\alpha=30°$.

---

4. feladat: Legyen az ABC háromszög AB oldalának A-hoz közelebbi harmadolópontja P, az A-tól távolabbi harmadolópontja Q. Legyen továbbá a BC oldalon a B-hez közelebbi



A 3. feladat III. megoldásához.

harmadolópont R, a B-től távolabbi harmadolópont S. Legyen a CA oldalon a C-hez közelebbi harmadolópont T, a C-től távolabbi harmadolópont U. Legyen a PS és BT szakaszok metszéspontját az U ponttal összekötő egyenes és a BC szakasz metszéspontja V. Határozzuk meg a BUV háromszög és a $PQRSTU$ hatszög területének arányát.

Bíró Bálint (Eger)

Megoldás: Jelöléseink az ábrán láthatók.

A párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt a TS szakasz párhuzamos az AB oldallal, továbbá a párhuzamos szelőszakaszok tételéből következően $TS = \frac{1}{3}AB$. Mivel azonban $BP = \frac{2}{3}AB$, ezért $\frac{TS}{BP} = \frac{1}{2}$.

A TZS és BZP háromszögek két-két szöge a TS és BP szakaszok párhuzamossága miatt egyenlő, tehát a TZS és BZP háromszögek megfelelő szögei egyenlők, vagyis a két háromszög hasonló. A hasonlóságból következik a megfelelő oldalak arányának egyenlősége, így ebből és előző eredményünkből

$$\frac{TS}{BP} = \frac{ZS}{ZP} = \frac{ZT}{ZB} = \frac{1}{2}$$

következik, tehát a Z pont a PS szakasz S ponthoz közelebb eső harmadolópontja.

Ismét a párhuzamos szelők tételének megfordításából következik, hogy az UP szakasz párhuzamos a BC oldallal, és a párhuzamos szelőszakaszok tétele miatt $UP = \frac{1}{3}BC$. Az UPZ és VSZ háromszögekben két-két szög megegyezik, mert az UP és VS szakaszok párhuzamosak, a két háromszög megfelelő szögei egyenlők, tehát a két háromszög hasonló, ezért a megfelelő oldalak aránya is egyenlő, azaz $\frac{VS}{UP} = \frac{VZ}{UZ} = \frac{ZS}{ZP}$. Ugyanakkor az előzőekben igazoltuk, hogy $\frac{ZS}{ZP} = \frac{1}{2}$, ezért

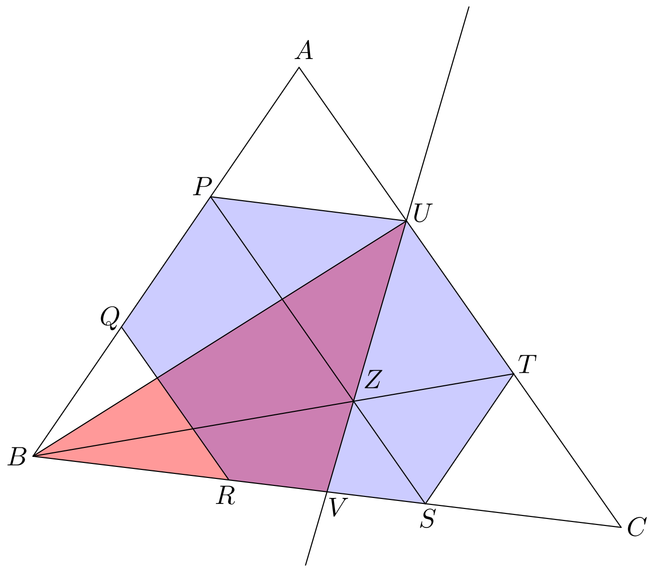
$$\frac{VS}{UP} = \frac{VZ}{UZ} = \frac{ZS}{ZP} = \frac{1}{2}.$$

Eszerint a VS szakasz hossza az UP szakasz hosszának a felével egyenlő, de ebből $UP = \frac{1}{3}BC$ miatt $VS = \frac{1}{6}BC$ következik.

Így $VS + SC = \frac{1}{6}BC + \frac{1}{3}BC = \frac{1}{2}BC$, vagyis a V pont a BC szakasz felezőpontja.

Az UBC háromszögben tehát az UV szakasz súlyvonal, amely felezi az UBC háromszög területét, azaz $T_{BUV} = \frac{1}{2}T_{UBC}$.

Könnyen látható, hogy az UBC háromszög területe az ABC háromszög területének kétharmad része, hiszen $\frac{UC}{AC} = \frac{2}{3}$, és az UC illetve AC oldalakhoz tartozó magasság a két háromszögben egyenlő.



A 4. feladathoz.

Ebből rögtön következik, hogy $T_{BUV} = \frac{1}{2}T_{UBC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}T_{ABC} = \frac{1}{3}T_{ABC}$, vagyis a BUV és az ABC háromszögek területének aránya $1:3$.

Nyilvánvaló, hogy $\frac{T_{APU}}{T_{ABC}} = \frac{1}{9}$, hiszen a két háromszög szögei a megfelelő oldalak egy egyenesbe esése illetve párhuzamossága miatt egyenlők, ezért a két háromszög hasonló és a megfelelő oldalak aránya $1:3$. Hasonlóan látható be, hogy $\frac{T_{BRQ}}{T_{ABC}} = \frac{1}{9}$ és $\frac{T_{CTS}}{T_{ABC}} = \frac{1}{9}$.

Ebből következik, hogy

$$T_{PQRSTU} = T_{ABC} - T_{APU} - T_{BRQ} - T_{CTS} = \frac{2}{3}T_{ABC}.$$

Mivel előző eredményünk szerint $T_{BUV} = \frac{1}{3}T_{ABC}$, ezért

$$\frac{T_{BUV}}{T_{PQRSTU}} = \frac{1}{2}.$$

---

5. feladat: Egy 10×10-es táblázat minden sorába és minden oszlopába az ábrán látható módon beírjuk a számokat 0-tól 9-ig, majd minden sorban és minden oszlopban bekeretezünk pontosan 1 számot, tehát összesen 10-et. Van-e a bekeretezett számok között mindig legalább két azonos szám?

0	1	2	…	9
9	0	1	…	8
8	9	0	…	7
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
1	2	3	…	0

Szabó Magda (Szabadka)

Megoldás: Vegyük észre, hogy a táblázat tetszőleges elemét megkaphatnánk úgy is, hogy a sorának az első eleméhez hozzáadnánk az oszlopának az első elemét és vennénk ennek az összegnek a 10-es maradékát.

Most bebizonyítjuk, hogy lesz legalább két azonos szám.

Bizonyítsunk indirekten, azaz tegyük fel, hogy mind a 10 kiválasztott szám különböző.

Ekkor a kiválasztott számok összege $0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$, aminek a 10-zel vett osztási maradéka 5. A fentiek szerint ezt megkaphatjuk úgy is, hogy az első sor és az első oszlop elemeinek összegét vesszük, ami $2 \cdot (0 + 1 + 2 + \ldots + 9) = 90$, aminek a 10-zel vett osztási maradéka 0.

Mivel a két maradék nem egyezik meg, ellentmondásra jutottunk. Tehát mindig van két azonos szám.

---

6. feladat: Jelölje tetszőleges pozitív egész n szám esetén $t(n)$ az n szám különböző prímosztóinak számát. Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan pozitív egész n szám van, amelyre

a.) $t\left(n^2+n\right)$ páratlan.

b.) $t\left(n^2+n\right)$ páros.

Borbély József (Tata)

Megoldás: Nyilvánvaló, hogy ha $(a;b) = 1$, akkor $t(a;b) = t(a) + t(b)$.
Mivel $(n;n+1) = 1$ és $n^2 + n = n \cdot (n+1)$, így

$$t\left(n^2+n\right) = t(n) + t(n+1).$$

Legyen $k > 0$ egész szám. Ekkor igazak a következő álítások.

- Minden $n = 2^k$-ra $t(n) = 1$, azaz végtelen sok páros n-re $t(n)$ páratlan.
- Minden $n = 2 \cdot 3^k$-ra $t(n) = 2$, azaz végtelen sok páros n-re $t(n)$ páros.
- Minden $n = 3^k$-ra $t(n) = 1$, azaz végtelen sok páratlan n-re $t(n)$ páratlan.
- Minden $n = 3 \cdot 5^k$-ra $t(n) = 2$, azaz végtelen sok páratlan n-re $t(n)$ páros.

Másképpen fogalmazva: nem lehet, hogy páros n-re $t(n)$ csak páros vagy csak páratlan értéket vegyen fel; ugyancsak nem lehet, hogy páratlan n-re $t(n)$ csak páros vagy csak páratlan értéket vegyen fel.

Könnyű látni, hogy ebből következik, hogy végtelen sok esetben két egymást követő számra $t(n)$ azonos, illetve különböző paritású. Innen következik a bizonyítandó állítás.