XX. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Bonyhád, 2011. március 11–15.

10. osztály

1. feladat: Legyen egy háromszög három oldalának a hossza a, b és c. Bizonyítsuk be, hogy

$$3 \leq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \leq 4$$

Mikor állhat fenn egyenlőség?

Kántor Sándorné (Debrecen)

Megoldás: A feladatban szereplő kettős egyenlőtlenséget bontsuk két részre és végezzünk ekvivalens átalakításokat.

$$3 \leq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \leq 4$$

$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 \leq 4(ab+bc+ca)$$

a) Bizonyítsuk először a bal oldalt:

$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2, \tag{1}$$

amiből a négyzetre emelést elvégezve és átrendezés után

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 0.$$

Kettővel való beszorzás és a tagok csoportosítása után kapjuk, hogy

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0,$$

ami minden valós a, b, c értékre igaz, így az (1) egyenlőtlenség is igaz.

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a=b=c$, tehát ha a háromszög szabályos.

b) Tekintsük most a jobb oldalt.

$$(a+b+c)^2 \leq 4(ab+bc+ca) \tag{2}$$

A négyzetre emelés és mindkét oldalból $2ab+2bc+2ca$ kivonás után

$$a2+b^2+c^2 \leq 2(ab+bc+ca). \tag{2$*$}$$

Mivel

$$2(ab+bc+ca) = a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)$$

és a háromszög-egyenlőtlenségek szerint

$$a^2 < a(b+c), \quad b^2 < b(a+c), \quad c^2 < c(a+b),$$

az egyenlőtlenségek összeadásával (2$*$) igaz. Mivel (2$*$)-ot (2)-ből ekvivalens átalakításokkal kaptuk meg, így (2) is igaz és egyenlőség soha nem áll fenn.

Mivel az átalakítások ekvivalensek, ezért a bizonyítást a visszafelé bizonyítás módszerére való hivatkozással lehet befejezni.

---

2. feladat: Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} 4x^2 - 3y = xy^3 \\ x^2 + x^3y^2 = 2y \end{aligned}\right\}$$

Balázsi Borbála (Beregszász)

Megoldás: Ha $x = 0$ vagy $y = 0$, az $(x; y) = (0; 0)$ megoldást kapjuk.
Ha $x \neq 0$ és $y \neq 0$, az első egyenletet szorozzuk meg x^2-tel, a másodikat y-nal.

$$\begin{aligned} 4x^4 - 3x^2y - x^3y^3 &= 0 \\ x^2y + x^3y^3 &= 2y^2 \end{aligned}$$

Adjuk össze (1)-et és (2)-t!

$$4x^4 - 2x^2y = 2y^2$$

Az első egyenletet nullára rendezés és 2-vel való osztás után szorzattá alakíthatjuk:

$$\left(y - x^2\right)\left(y + 2x^2\right) = 0$$

Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha legalább egy tényezője nulla, így két esetet különböztetünk meg.
Ha $y = x^2$, akkor felhasználjuk az eredeti egyenletrendszer második egyenletét:

$$\begin{aligned} x^2 + x^7 &= 2x^2 \\ x^7 &= x^2 \\ x^5 &= 1 \end{aligned}$$

Innen $x = 1$, $y = 1$.
Ha $y = -2x^2$, akkor is az eredeti egyenletrendszer második egyenletét használjuk:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x^7 &= -4x^2 \\ 4x^7 &= -5x^2 \\ x^5 &= -\frac{5}{4} \\ x &= -\sqrt[5]{\frac{5}{4}} = -\sqrt[5]{\frac{40}{32}} = -\frac{\sqrt[5]{40}}{2} \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve $y = -2x^2$-be

$$y = -2\left(-\frac{\sqrt[5]{40}}{2}\right)^2 = -2 \cdot \frac{\sqrt[5]{1600}}{4} = -\sqrt[5]{\frac{1600}{32}} = -\sqrt[5]{50}.$$

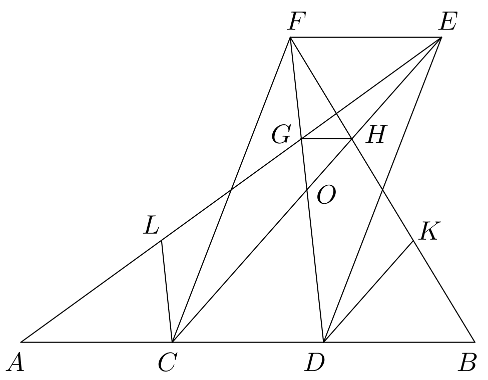
Tehát a megoldások:

$$(0; 0), \quad (1; 1), \quad \left(-\frac{\sqrt[5]{40}}{2}; -\sqrt[5]{50}\right).$$

3. feladat: Az AB szakaszon vegyük fel a C és D pontokat úgy, hogy $AC = CD = DB$ legyen és legyen $CDEF$ egy tetszőleges paralelogramma. Legyen G az AE és DF, H pedig a BF és CE metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy $AB = 9GH$.

Olosz Ferenc (Szatmárnémeti)

Megoldás: Legyen O a paralelogramma átlóinak metszéspontja, vegyük fel azokat a K és L pontokat, melyekre $K \in BF$ és $L \in AE$ és $DK \parallel CE$ és $CL \parallel DF$.



A 3. feladathoz.

A paralelogramma átlói felezik egymást, ezért a DFK háromszögben OH középvonal és $DK = 2 \cdot OH$.

A CBH háromszögben DK középvonal és $CH = 2 \cdot DK = 4 \cdot OH$, ahonnan $CO = 3 \cdot OH$.

Hasonlóan bizonyítjuk, hogy $DO = 3 \cdot OG$.

A COD és HOG háromszögek hasonlók, ezért

$$\frac{CO}{OG} = \frac{DO}{GO} = \frac{CD}{HG} = 3$$

.

Tehát $CD = 3 \cdot HG$ és $AB = 3 \cdot CD$, így $AB = 9 \cdot GH$.

4. feladat: Egy $2n$ oldalú, szimmetria-középponttal rendelkező konvex sokszöglap ($\mathcal{P}$) csúcspontjai közül kiválasztunk hármat, jelöljük őket A-val, B-vel és C-vel. Igazoljuk, hogy az ABC háromszög t területe nem nagyobb, mint $\frac{T}{2}$, ahol T a $\mathcal{P}$ sokszöglap területét jelöli.

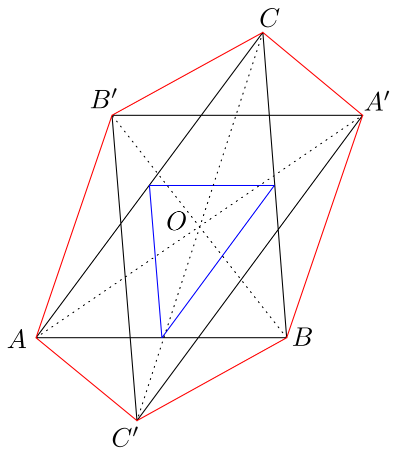
Dálya Pál Péter (Szeged)

Megoldás: Jelölje O a $\mathcal{P}$ szimmetria-középpontját és A', B', C' rendre az A, B, C pontok O-ra vonatkozó tükörképeit. Három esetet különböztetünk meg:

I. eset. Ha O illeszkedik az ABC háromszög egyik oldalára, akkor ez csakis az oldal felezőpontja lehet, hiszen ellenkező esetben a konvex sokszög kettőnél több csúcsa is illeszkedne az illető oldal egyenesre, ami konvex sokszög esetén kizárt. Ha a háromszög harmadik csúcsát tükrözzük a szemközti oldal felezőpontjára, O-ra, akkor egy paralelogrammát kapunk, amelynek csúcsai a sokszög csúcsai közül valók, így a paralelogramma része a konvex sokszöglapnak, tehát $2t \leq T$, vagyis $t \leq \frac{T}{2}$.

II. eset. Ha O az ABC háromszöglapon kívül van, akkor az O ponton át húzhatunk egy olyan e egyenest, amelyik nem metszi a háromszöglapot. Az A, B, C pontok és az A', B', C' tükörképek az e egyenes különböző oldalán helyezkednek el. Tehát az ABC és $A'B'C'$ egybevágó háromszöglapoknak nincs közös pontjuk és mindkettő a konvex sokszög része, így ebben az esetben is igaz, hogy $t \leq \frac{T}{2}$.

III. eset. Ha O az ABC háromszöglap belső pontja (lásd az *ábrát*), akkor mivel az A, B, C, A', B', C' pontok a konvex sokszög csúcsai, következik, hogy $AC'BA'CB'$ egy konvex hatszöglap, amely része a konvex sokszöglapnak. Nyilvánvalóan ahhoz, hogy a csúcsok tükörképei a háromszöglapon kívül kerüljenek, szükséges, hogy a szimmetria-középpont az ABC háromszög középponti háromszögének belsejében legyen.



A 4. feladathoz.

Jelölje x, y, z az O pontnak rendre a BC, CA, AB egyenesektől mért távolságát; a, b, c rendre a BC, CA, AB oldalak hosszát; m_a, m_b, m_c a megfelelő magasságokat, így mivel $t_{OBC} + t_{OCA} + t_{OAB} = t$, következik, hogy

$$\frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2} = t.$$

Könnyen belátható (a középpontos tükrözésből következik), hogy

$$d(A', BC) = m_a - 2x, \quad d(B', AC) = m_b - 2y \quad \text{és} \quad d(C', AB) = m_c - 2z.$$

Ezek alapján kiszámítható a konvex hatszöglap területe.

$$\begin{aligned} t_{AC'BA'CB'} &= t_{BA'C} + t_{CB'A} + t_{AC'B} + t \\ &= \frac{a\,(m_a - 2x)}{2} + \frac{b\,(m_b - 2y)}{2} + \frac{c\,(m_c - 2z)}{2} + t \\ &= 4t - (ax + by + cz) = 2t \end{aligned}$$

Mivel a konvex hatszöglap része az eredeti konvex sokszöglapnak, következik, hogy $2t \leq T$, ami igazolja a feladat állítását ebben az esetben is.

5. feladat: Hány olyan egyenlőszárú trapéz létezik, amelynek a kerülete 2011 és az oldalak mérőszáma egész szám?

Szabó Magda (Szabadka)

Megoldás: A trapéz oldalai legyenek ebben a sorrendben a, c, b, c; $a \geq b$ párhuzamos oldalak.

A trapéz kerülete 2011:

$$a + 2c + b = 2011$$
$$a + b = 2011 - 2c$$

Tehát a párhuzamos oldalak összege páratlan szám, így nem lehetnek egyformák, amiből következik, hogy $a > b$.

Könnyű meggondolni, hogy igaz a következő is:

$$a < c + b + c,$$

azaz

$$2a < a + c + b + c = 2011,$$

tehát $a \leq 1005$. Az a valamely rögzített értékére b az $\{1, 2, 3, ...1005\}$ halmaz bármely a-nál kisebb eleme lehet, de paritásban különbözőnek kell lennie, hiszen az összegük páratlan szám. Tehát rögzített a-ra a lehetőségek száma $\left[\frac{a}{2}\right]$.

Ha adott a és b, akkor c egyértelműen meghatározható (és ebből következően a trapéz is egyértelműen meghatározott), hiszen

$$c = \frac{2011 - a - b}{2}$$

Ezekat felhasználva felírhatjuk az ilyen trapézok számát:

$$\sum_{a=1}^{1005} \left[\frac{a}{2}\right] = 0 + 1 + 1 + 2 + 2 + \ldots + 501 + 501 + 502 + 502 =$$
$$= 2 \cdot \sum_{i=1}^{502} i = 2 \cdot \frac{502 \cdot 503}{2} = 252506.$$

---

6. feladat: Adott nyolc különböző pozitív egész szám a tízes számrendszerben. Képezzük bármely kettő (pozitív) különbségét, majd az így kapott 28 számot szorozzuk össze. 6-nak melyik az a legnagyobb kitevőjű hatványa, amivel ez a szorzat biztosan osztható?

Kiss Sándor (Nyíregyháza)

Megoldás: Egy szám akkor és csak akkor osztható 6-tal, ha osztható 2-vel és 3-mal.

Két szám különbsége csak akkor osztható 2-vel, ha azok paritása megegyezik (mindkettő páros vagy mindkettő páratlan.

Belátható, hogy négy páros és négy páratlan szám megadása esetén lesz a lehető legkevesebb páros tényező, ugyanis

$$\binom{x}{2} + \binom{8-x}{2} \geq 2\binom{4}{2}$$

A négy párosból és a négy páratlanból is 6-6 darab 2-vel osztható tényezőt lehet képezni, a többi társítás páratlan lesz. Ez azt jelenti, hogy 2-nek a 12. hatványával biztosan osztható lesz a 28 szám szorzata.

A hárommal való oszthatóság szempontjából a természetes számok algebrai alakja $3k$, $3k+1$ vagy $3k+2$ lehet. Az azonos algebrai alakú számok különbsége osztható 3-mal.

Legkevesebb 3-mal osztható tényezőt akkor kapunk, ha a fenti alakú számok eloszlása 3, 3, 2, valamilyen sorrendben.

Ha valamelyik típusból 3 darab van, akkor abból 3 db hárommal osztható számot tudunk képezni. Ha valamelyikből csak 2, akkor 1 darab 3-mal oszthatót készíthetünk.

Így a 3 kitevője legalább $3+3+1$ lesz, vagyis a 3 hetedik hatványával még biztosan osztható.

Összegezve: a 28 darab feladatbeli tényező a 6 hetedik hatványával még biztosan osztható. (A nyolcadikkal viszont nem feltétlenül, mert például az $\{1, 2, 3, \ldots 8\}$ esetén a szorzat csak 3-nak csak a 7. hatványával osztható.)