XIX. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Szatmárnémeti, 2010. március 19-22.

12. osztály

1. feladat: Határozzuk meg az $E(x) = (1+\cos x)\sin x$ kifejezés legnagyobb értékét, ha x tetszőleges valós szám! Milyen x esetén veszi ezt fel?

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

2. feladat: Határozzuk meg azt a három különböző $\dfrac{n}{n-1}$, $(n \in \mathbb{N},\, n > 1)$ alakú törtet, amelyek összege egész szám!

Nemecskó István (Budapest)

3. feladat: Keressük meg azt a leghosszabb, szigorúan növekvő, egészekből álló mértani sorozatot, amelynek tagjai a $[100, 1000]$ intervallumban vannak!

Szabó Magda (Szabadka)

4. feladat: Az $(x_n)_{n\geq 1}$ valós számsorozat teljesíti az

$$(1 + x_n)x_{n+1} = n, n \geq 1$$

rekurziót és $x_1 = 1$. Igazoljuk, hogy $n \geq 2$ esetén

$$\left(\sqrt{\frac{n+1}{2}} - 1\right)^2 < 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 < \frac{n^2+n+2}{2n}.$$

Bencze Mihály (Brassó)

5. feladat: Bizonyítsuk be, hogy négy különböző, nemnegatív valós szám közül kiválasztható kettő (x és y), amelyekre

$$\frac{1+xy}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}} > \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

dr. Minda Mihály (Vác)

6. feladat: Egy laktanya udvarán 2010 katona magasság szerint áll sorban. Egy perc alatt bármelyik két katona egymással helyet cserélhet (tudnak elég gyorsan futni). Egyszerre több helycsere is történhet, de egy katona egy perc alatt csak egy helycserében vehet részt. Legfeljebb hány perc szükséges ahhoz, hogy névsor szerint álljanak sorba? (A katonák különböző magasságúak, és a nevük is különbözik.)

dr. Kántor Sándor (Debrecen)