XIX. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Szatmárnémeti, 2010. március 19-22.

12. osztály

1. feladat: Határozzuk meg az $E(x) = (1+\cos x)\sin x$ kifejezés legnagyobb értékét, ha x tetszőleges valós szám! Milyen x esetén veszi ezt fel?

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

1. feladat I. megoldása: A sin és cos függvény periodikussága alapján elégséges a kifejezés maximumát a $[0, 2\pi]$ intervallumon meghatározni. Ugyanakkor látható, hogy ha $x \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, akkor a kifejezés értéke növelhető azáltal, hogy x helyett $\pi - x$-et vagy $x - \pi$-t vagy $2\pi - x$-et helyettesítünk (vagyis a változót visszavezetjük az első negyedre). így feltételezhetjük, hogy $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, azaz $t = \cos x \geq 0$. A kifejezés ebben az esetben

$$E_1(t) = (1+t)\sqrt{1-t^2}$$

alakban írható. A számtani és a mértani középarányos közti egyenlőtlenség alapján

$$\sqrt[4]{\left(\frac{1+t}{3}\right)^3 (1-t)} \leq \frac{1}{2}, \text{ tehát}$$

$$(1+t)\sqrt{1-t^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\frac{1+t}{3} = 1 - t$, vagyis ha $t = \frac{1}{2}$. Ez mutatja, hogy a kifejezés maximuma $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ és ezt a $\frac{\pi}{3}$-ban (illetve a $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ pontokban) veszi fel.

1. feladat II. megoldása: A sin és cos periodikus függvények, főperiódusuk 2π, ezért elégséges, ha vizsgáljuk a kifejezés értékét a $[0, 2\pi]$ intervallumon. A $[\pi, 2\pi]$ intervallumon a $\sin x$ negatív, az $1 + \cos x$ pedig pozitív, ezért a kifejezés értéke is negatív, így itt nem kapjuk meg a legnagyobb értéket. A $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ intervallumon $\sin x$ értéke pozitív, $\cos x$ értéke negatív, $1 + \cos x$ értéke kisebb, mint 1, így a kifejezés értéke a $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ intervallumon nem nagyobb, mint $x = \frac{\pi}{2}$-ben. Emiatt a kifejezés legnagyobb értékét csak a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon kaphatjuk meg. Itt $\sin x$ és $\cos x$ értéke is pozitív. Legyen tehát $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ és $t := \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Ekkor

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{és} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \text{ahol} \quad t \in [0, 1].$$

Így az adott kifejezés:

$$\left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2t}{1+t^2} = \frac{4t}{(1+t^2)^2}.$$

Alkalmazzuk 4 pozitív valós szám számtani és mértani középarányosai közötti egyenlőtlenséget:

$$1 + t^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + t^2 \geq 4\sqrt[4]{\frac{t^2}{27}}$$

$$(1+t^2)^2 \geq 16\sqrt{\frac{t^2}{27}} = \frac{16t}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{4t}{(1+t^2)^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Egyenlőség $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ esetén áll fenn. Az alkalmazott helyettesítés kölcsönösen egyértelmű, tehát $(1 + \cos x)\sin x \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$, így a kifejezés legnagyobb értéke $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, amit $x = \frac{\pi}{3}$ esetén (vagyis általánosan $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$ esetén) vesz fel.

1. feladat III. megoldása: A sin és cos periodikus függvények, főperiódusuk 2π, ezért elég, ha vizsgáljuk a kifejezés értékét a $[0, 2\pi]$ intervallumon.

Legyen $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (1 + \cos x)\sin x$. Ekkor $f'(x) = \cos 2x + \cos x = 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$. A Fermat-tétel alapján a függvény szélsőértékeit a $2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$ egyenlet megoldásai között keressük. A gyökök: $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \pi$ és $x_3 = \frac{5\pi}{3}$. Mivel $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $f(\pi) = 0$ és $f(x_3) < 0$, így a kifejezés legnagyobb értéke $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, amit $x = \frac{\pi}{3}$ esetén vesz fel.

2. feladat: Határozzuk meg azt a három különböző $\dfrac{n}{n-1}$, $(n \in \mathbb{N},\ n > 1)$ alakú törtet, amelyek összege egész szám!

Nemecskó István (Budapest)

2. feladat megoldása: Legyen a három tört $\frac{x}{x-1}$, $\frac{y}{y-1}$, $\frac{z}{z-1}$. Feltehetjük, hogy $x < y < z$. Tudjuk, hogy $\frac{x}{x-1} + \frac{y}{y-1} + \frac{z}{z-1} - \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{z-1}\right) = 3$. Mivel a három keresett tört összege egész, ezért a zárójelben álló kifejezés is egész. Továbbá akkor a legnagyobb, ha $x = 2,\ y = 3,\ z = 4$, vagyis $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$, tehát

$$\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{z-1}\right) \leq \frac{11}{6}.$$

Mivel egész, akkor csak 1-gyel lehet egyenlő. Így megoldandó az

$$\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{z-1}\right) = 1$$

egyenlet.

1. eset. Ha $x = 2$, akkor $\frac{1}{1} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{z-1} = 1$ egyenlőségnek kell teljesülnie, de ez nem lehetséges.

2. eset. Ha $x = 3$, akkor

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{z-1} = 1 \Longleftrightarrow \frac{y-1+z-1}{(y-1)(z-1)} = \frac{1}{2}.$$

Keresztbeszorzás és rendezés után:

$$yz - 3y - 3z + 5 = 0 \Longleftrightarrow (y-3)(z-3) = 4.$$

Mivel y és z egészek és $y < z$, ezért csak az $y - 3 = 1$ és $z - 3 = 4$ lehetséges. Ebből $y = 4$ és $z = 7$, amelyek valóban megoldások.

3. eset: ha $x \geq 4$, akkor a legnagyobb összeg $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$ lehet. De ez kisebb, mint 1, tehát nem lehetséges.

Következésképpen a feladatnak csak a $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{7}{6}$ törtek tesznek eleget.

3. feladat: Keressük meg azt a leghosszabb, szigorúan növekvő, egészekből álló mértani sorozatot, amelynek tagjai a $[100, 1000]$ intervallumban vannak!

Szabó Magda (Szabadka)

3. feladat megoldása: Meg kell keresni azt a legnagyobb n természetes számot, amelyre teljesül:

$$100 \leq c < cq < cq^2 < \ldots < cq^{n-1} \leq 1000,$$

ahol c természetes szám, a q pedig 1-nél nagyobb racionális szám. Ha a $q = \frac{a}{b}$, ahol a és b relatív prímek és $a > b$, akkor belátható, hogy $a = b + 1$ esetén lesz a sorozat a leghosszabb, így

$$100 \leq c < c\left(\tfrac{b+1}{b}\right) < c\left(\tfrac{b+1}{b}\right)^2 < \ldots < c\left(\tfrac{b+1}{b}\right)^{n-1} \leq 1000,$$

ahol $b^{n-1}|c$. Ha $b = 1$, akkor

$$1000 \geq c\left(\tfrac{b+1}{b}\right)^{n-1} = c \cdot 2^{n-1} \geq 100 \cdot 2^{n-1},$$

ezért $n \leq 4$.

Ha $b=2$, akkor
$$1000 \geq c\left(\frac{b+1}{b}\right)^{n-1} = c\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \geq 100\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},$$
ezért $n \leq 6$.

Ha $b \geq 3$, akkor $\frac{c}{b^{n-1}} \geq 1$, mert $c \geq b^{n-1}$, így
$$1000 \geq c\left(\frac{b+1}{b}\right)^{n-1} \geq (b+1)^{n-1} \geq 4^{n-1},$$
ezért $n \leq 5$.

Tehát a leghosszabb mértani sorozat 6 tagú és ez a következő: $128, 192, 288, 432, 648, 972$, mert $c = 128$ és $q = \frac{3}{2}$.

4. feladat: Az $(x_n)_{n\geq 1}$ valós számsorozat teljesíti az
$$(1+x_n)x_{n+1} = n, n \geq 1$$
rekurziót és $x_1 = 1$. Igazoljuk, hogy $n \geq 2$ esetén
$$\left(\sqrt{\frac{n+1}{2}}-1\right)^2 < 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 < \frac{n^2+n+2}{2n}.$$

Bencze Mihály (Brassó)

4. feladat megoldása: A sorozat első néhány tagja: $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{4}{3}$, $x_4 = \frac{9}{7}$, $x_5 = \frac{7}{4}$. Vizsgáljuk meg, hogy mi lenne elégséges a második egyenlőtlenség induktív bizonyításához. Az indukciós feltevés az
$$n + \sum_{k=1}^{n} x_k^2 < \frac{n^2+n+2}{2}$$
egyenlőtlenség lenne és ebből kellene belátni az
$$n+1+x_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^{n} x_k^2 < \frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}$$
egyenlőtlenséget. így elégséges volna belátni, hogy
$$1 + x_{n+1}^2 < \frac{(n+1)^2+(n+1)+2-n^2-n-2}{2}$$
vagyis $x_{n+1}^2 < n$. Másrészt a rekurzió alapján ezt csak akkor egyszerű igazolni, ha alsó becslésünk is van, pontosabban ha teljesülne az $x_n > \sqrt{n}-1$ egyenlőtlenség is. $n=1$ esetén ez nem teljesül, de $n=2$-re már igen, emiatt előbb megpróbáljuk matematikai indukció segítségével belátni, hogy
$$\sqrt{n}-1 < x_n < \sqrt{n-1}, \quad n \geq 2. \tag{1}$$
$n \in \{2,3\}$ esetén a kiszámított értékek alapján látható, hogy az egyenlőtlenségek teljesülnek. Ugyanakkor ha rögzített n esetén
$$\sqrt{n}-1 < x_n < \sqrt{n-1},$$
akkor
$$\frac{n}{1+\sqrt{n-1}} < \frac{n}{1+x_n} < \frac{n}{\sqrt{n}},$$
tehát a felső korlát megvan, és az alsóhoz elégséges belátni, hogy
$$\sqrt{n+1}-1 < \frac{n}{1+\sqrt{n-1}}.$$

Ez viszont igaz, mert
$$\sqrt{n+1}-1=\frac{n}{1+\sqrt{n+1}}<\frac{n}{1+\sqrt{n-1}},$$
tehát a matematikai indukció elve alapján (1) igaz.

Az (1) alapján
$$k-2\sqrt{k}+1<x_k^2<k-1, \quad k\geq 2,$$
tehát
$$\frac{n(n+1)}{2}-1-2\sum_{k=2}^{n}\sqrt{k}<\sum_{k=2}^{n}(k+1-2\sqrt{k})<\sum_{k=2}^{n}x_k^2<\frac{(n-1)n}{2}.$$
A jobb oldali egyenlőtlenség alapján
$$1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2<1+\frac{n^2-n+2}{2n}=\frac{n^2+n+2}{2n},$$
ami a bizonyítandó egyenlőtlenség jobb oldala. A másik egyenlőtlenség igazolásához elégséges lenne belátni, hogy
$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}<n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$$
és ez igaz a számtani és négyzetes középarányos közti egyenlőtlenség alapján (vagy direkt módon is igazolható például matematikai indukcióval). így
$$\frac{n(n+1)}{2}-2n\sqrt{\frac{n+1}{2}}<\frac{n(n+1)}{2}-2\sum_{k=2}^{n}\sqrt{k}<\sum_{k=1}^{n}x_k^2$$
vagyis
$$\frac{n+1}{2}-2\sqrt{\frac{n+1}{2}}+1<1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2$$
ami épp a bizonyítandó egyenlőtlenség.

5. feladat: Bizonyítsuk be, hogy négy különböző, nemnegatív valós szám közül kiválasztható kettő (x és y), amelyekre
$$\frac{1+xy}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}>\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

dr. Minda Mihály (Vác)

5. feladat I. megoldása: Minden a valós számhoz kölcsönösen egyértelműen hozzárendelhető az $\overrightarrow{a}(1,a)$ vektor. Így az x-hez az $\overrightarrow{x}(1,x)$, az y-hoz pedig az $\overrightarrow{y}(1,y)$ vektorok rendelhetők.
Legyen a két vektor hajlásszöge α. Két vektor skaláris szorzatának segítségével felírható, hogy
$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}}{|\overrightarrow{x}|\cdot|\overrightarrow{y}|}=\frac{1+xy}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}.$$
Tehát a feladat állítása ekvivalens a $\cos\alpha>\frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenlőtlenséggel, ahol α a két vektor hajásszögének mértéke. Az $\overrightarrow{a}(1,a)$ „típusú” vektorok végpontjai az $x=1$ egyenes I. síknegyedben lévő pontjai, valamint az abszcisszára eső pontja. Osszuk fel az I. síknegyedet 3 darab O középpontú, $30°$-os szögtartományra. A skatulya-elv értelmében a négy vektorból legalább kettő ugyanabba a szögtartományba (vagy annak határvonalára) esik. Így a két vektor hajlásszögére igaz, hogy $\alpha\leq 30°$, azaz $\cos\alpha\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ugyanakkor az Oy tengelyre nem illeszkedhet a szerkesztett vektorok közül egyik sem, tehát nem lehetséges az, hogy a négy vektor közül bármely kettő szögének mértéke $\geq 30°$. Emiatt az egyenlőtlenség szigorú.

5. feladat II. megoldása: Minden $x \geq 0$ valós szám esetén létezik $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ úgy, hogy $x = \operatorname{tg}\varphi$. Ugyanakkor, ha $x = \operatorname{tg}\varphi$ és $y = \operatorname{tg}\omega$, akkor

$$\frac{1+xy}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}} = \frac{1+\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\omega}{\frac{1}{\cos\varphi}\frac{1}{\cos\omega}} = \cos|\varphi-\omega|.$$

így a feladat egyenértékű a következő állítással:

Ha $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ és φ_4 a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallum elemei, akkor létezik $i, j \in \{1,2,3,4\}$ úgy, hogy $\cos|\varphi_i - \varphi_j| > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ennek igazolása érdekében feltételezhetjük, hogy $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \varphi_4$, tehát a $\varphi_{i+1} - \varphi_i$ különbségek közül a legkisebb biztosan kisebb, mint $\frac{\pi}{6}$. Ez viszont azt jelenti, hogy

$$\cos \min_{1\leq i\leq 3} |\varphi_{i+1} - \varphi_i| > \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

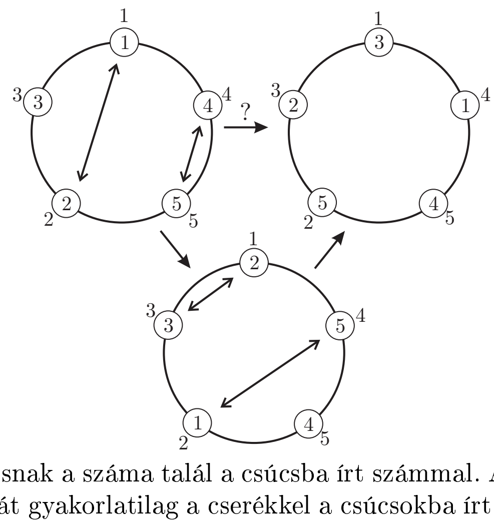
6. feladat: Egy laktanya udvarán 2010 katona magasság szerint áll sorban. Egy perc alatt bármelyik két katona egymással helyet cserélhet (tudnak elég gyorsan futni). Egyszerre több helycsere is történhet, de egy katona egy perc alatt csak egy helycserében vehet részt. Legfeljebb hány perc szükséges ahhoz, hogy névsor szerint álljanak sorba? (A katonák különböző magasságúak, és a nevük is különbözik.)

dr. Kántor Sándor (Debrecen)

6. feladat I. megoldása: Megmutatjuk, hogy 2 perc elegendő ahhoz, hogy névsor szerint álljanak sorba. Jelölje a katonákat nagyság szerinti sorrendben $A_1, A_2, \ldots, A_{2010}$. Készítsük el azt az irányított gráfot, amelynek ezek a csúcsai, és A_i-ből A_j-be akkor vezet nyíl (irányított él), ha az A_i katona névsorban a j-edik. Azt mondjuk, hogy az $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ csúcsok ciklust alkotnak, ha $A_{i_1} \to A_{i_2} \to \ldots \to A_{i_k} \to A_{i_1}$ (esetleg $k = 1$). Nyilvánvaló, hogy gráfunk diszjunkt ciklusok uniójára bomlik. Elegendő tehát egy ciklusra igazolni, hogy az előírt cserék két perc alatt párcserékkel megvalósíthatók, hiszen a diszjunkt ciklusokban egymástól függetlenül, egyszerre történhetnek a cserék.

Az $A_{i_1} \to A_{i_2} \to \ldots \to A_{i_k} \to A_{i_1}$ ciklusban az első percben az m-edik $\left(m = 1, 2, \ldots, [\frac{k-1}{2}]\right)$ helyen álló A_{i_m} katona cseréljen helyet a $(k-m)$-edik helyen állóval, a második percben pedig az m-edik $\left(m = 1, 2, \ldots, [\frac{k}{2}]\right)$ helyen álló katona cseréljen helyet a $(k-m+1)$-edik helyen állóval. A két csere végeredményeként az eredetileg az m-edik helyen álló A_{i_m} katona a $k-(k-m)+1 = (m+1)$-edik helyre kerül, az A_{i_k} pedig az első helyre, A_{i_1} helyére. Tehát megvalósult a kívánt csere. Háromtagú ciklusnál a csere egy lépésben nem valósítható meg, tehát legalább két perc szükséges a cseréhez.

6. feladat II. megoldása: A katonákat számozzuk meg a nagyság szerinti sorrendnek megfelelően 1-től 2010-ig és jelöljük $\sigma(i)$-vel a névsor szerinti sorrendben elfoglalt helyének sorszámát. így egy σ permutációt értelmeztünk, amely diszjunk ciklusok szorzatára bomlik, tehát elégséges a cseréket ciklusokon belül elvégezni. ábrázoljuk a ciklus elemeit egy szabályos sokszög csúcsaiban (a ciklusban elfoglalt sorrendnek megfelelően, trigonometrikus irányban) és számozzuk meg a sokszög csúcsait ugyanazokkal a számokkal.



így kezdetben minden csúcsnak a száma talál a csúcsba írt számmal. A cserék végrehajtása után az i csúcsra a $\sigma(i)$ szám kerül, tehát gyakorlatilag a cserékkel a csúcsokba írt számoknak a középpont körüli

$\frac{2\pi}{k}$ szögű elforgatását kell elérni, ahol k a ciklus hossza. Ez viszont két tengelyes tükrözés összetételével is elérhető. A tükrözések leírásából az első megoldásban leírt cseréket kapjuk.

Megjegyzés: A mellékelt ábrán a $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ciklus esetén szemléltettük a cseréket. Látható, hogy a permutációnak transzpozíciókra való felbontását kell létrehozni. Az ábrának megfelelő felbontás:

$$\sigma = (1,2) \cdot (4,5) \cdot (1,3) \cdot (2,4).$$