XIX. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Szatmárnémeti, 2010. március 19-22.

11. osztály

1. feladat: Határozzuk meg az 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 25, ... sorozat 2010. tagját, ha a sorozat tagjait úgy képeztük, hogy az 1-es után leírtuk az őt követő 2 páros számot, majd a kapott számot követő 3 páratlan számot, az ezután kapott számot követő 4 páros számot és így tovább.

Pintér Ferenc (Nagykanizsa)

2. feladat: Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nemnegatív valós számok teljesítik az

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + \ldots + n \cdot x_n = 2010$$

egyenlőséget. Határozzuk meg az $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ legkisebb lehetséges értékét!

Borbély József (Tata)

3. feladat: Határozzuk meg a

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = 3 - 4x^2$$

egyenlet valós megoldásait!

Szilágyi Judit és Nagy Örs (Kolozsvár)

4. feladat: Az $ABCD$ konvex négyszögben jelölje α a d_1 és d_2 hosszúságú AC, illetve BD átló által közrezárt szög mértékét. Mutassuk ki, hogy $ABCD$ akkor és csakis akkor négyzet, ha

$$(d_1 \sin A \sin C + d_2 \sin B \sin D) \cdot \sin \alpha = \sqrt{2(d_1^2 + d_2^2)}.$$

Longáver Lajos (Nagybánya)

5. feladat: Adjuk meg az összes olyan háromszöget, amelyben mindhárom oldal hossza (méterben kifejezve) prímszám és a terület mérőszáma (négyzetméterben) egész szám!

Mészáros Alpár Richárd (Kolozsvár)

6. feladat: Jelölje a_k a k pozitív egész szám legnagyobb páratlan osztóját.

a) Igazoljuk, hogy

$$\{a_{2^k}, a_{2^k+1}, \ldots, a_{2^{k+1}-1}\} = \{1, 3, 5, \ldots, 2^{k+1} - 1\}.$$

b) Igazoljuk, hogy $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1} a_k = \frac{4^n - 1}{3}$.

Dávid Géza (Székelyudvarhely)