XIX. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Szatmárnémeti, 2010. március 19-22.

11. osztály

1. feladat: Határozzuk meg az 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 25, ... sorozat 2010. tagját, ha a sorozat tagjait úgy képeztük, hogy az 1-es után leírtuk az őt követő 2 páros számot, majd a kapott számot követő 3 páratlan számot, az ezután kapott számot követő 4 páros számot és így tovább.

Pintér Ferenc (Nagykanizsa)

1. feladat I. megoldása: Vegyük észre, hogy a leírt részsorozatok mindig négyzetszámmal végződnek. Teljes indukcióval belátjuk, hogy ha k^2 után következő $k+1$ számot leírjuk az adott szabály szerint, akkor $(k+1)^2$-hez jutunk. Ehhez csak azt kell észrevennünk, hogy az első leírt szám k^2+1 és azt követően k darab 2-est kell hozzáadnunk, hogy a „váltás" bekövetkezzen. Viszont $k^2+1+2k=(k+1)^2$.
Ha a leírtakat figyelembe vesszük és k-val jelöljük azt a legnagyobb egész számot, melynek a négyzete a 2010. tag előtt van a sorozatban, akkor teljesülnie kell a következő egyenlőtlenségnek:

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}\leq 2010.$$

Innen $k=62$, ekkor $\frac{k(k+1)}{2}=1953$. Következésképpen a sorozat 2010. tagját megkapjuk, ha $62^2+1=3845$-höz hozzáadunk $(2010-1953-1)\cdot 2=56\cdot 2$-t, azaz $3845+56\cdot 2=3957$.

1. feladat II. megoldása: Számítsuk ki a sorozat első néhány tagját és figyeljük az indexek és a tagok közti összefüggést:

1	2	4	5	7	9	10	12	14	16	17
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}

A „váltások" az $1,3,6,10,15,\ldots$ indexeknél következnek be, hisz a csoportok (a táblázatban függőleges vonallal elválasztott részek) rendre $1,2,3,4,5,\ldots$ elemet tartalmaznak. így az első k csoport összesen $1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ számot tartalmaz, vagyis a k-adik csoport utolsó elemének indexe $\frac{k(k+1)}{2}$. Ha a sorozatnak csak az $u_k=x_{\frac{k(k+1)}{2}}$ részsorozatát nézzük, akkor a sorozat képzési szabálya alapján $u_{k+1}=u_k+2k+1$ és $u_1=1$, tehát

$$u_k=\underbrace{1+3+5+\ldots+(2k-1)}_{k\text{ tag}}=k^2.$$

Ugyanakkor $\frac{62\cdot 63}{2}=1953<2010<2016=\frac{63\cdot 64}{2}$, tehát $x_{2016}=63^2$ és ez a 63-adik csoport utolsó tagja. A csoporton belül az egymásutáni tagok különbsége 2, tehát

$$x_{2010}=x_{2016}-2\cdot 6=3969-12=3957.$$

2. feladat: Az $x_1,x_2,\ldots,x_n$ nemnegatív valós számok teljesítik az

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+1\cdot x_1+2\cdot x_2+3\cdot x_3+\ldots+n\cdot x_n=2010$$

egyenlőséget. Határozzuk meg az $x_1+x_2+\ldots+x_n$ legkisebb lehetséges értékét!

Borbély József (Tata)

2. feladat I. megoldása: Mivel az $x_1,x_2,\ldots,x_n$ számok nemnegatívak, írhatjuk, hogy

$$1\cdot x_1+2\cdot x_2+3\cdot x_3+\ldots+n\cdot x_n\leq n(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)\text{ és}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2,$$

tehát, ha $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = s$, akkor $2010 \leq ns + s^2$. De az $s^2 + ns - 2010 = 0$ egyenlet egyik gyöke negatív és a másik pozitív, tehát az előbbi egyenlőtlenség alapján

$$s \geq \frac{-n + \sqrt{n^2 + 4 \cdot 2010}}{2}.$$

Másrészt ezt az értéket el is érhetjük, ha

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0 \text{ és } x_n = \frac{-n + \sqrt{n^2 + 4 \cdot 2010}}{2},$$

tehát az $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ összeg minimuma $\frac{-n+\sqrt{n^2+4\cdot 2010}}{2}$.

2. feladat II. megoldása: Tekintsünk egy $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ szám n-est, amely teljesíti a feltételeket. Ha létezik olyan $j < n$, amelyre $x_j \neq 0$, akkor az x_j értékét cseréljük ki 0-ra és az x_n értékét $u > 0$-ra úgy, hogy az $(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, u)$ számokra is teljesüljön a feltétel. Mivel egyszerre csak két számot módosítunk, az

$$u^2 + nu = x_j^2 + jx_j + x_n^2 + nx_n$$

egyenlőségnek kell teljesülnie. Ugyanakkor az $u \to u^2 + nu$ függvény növekvő (mert $u > 0$) és világos, hogy

$$(x_n + x_j)^2 + n(x_n + x_j) > x_j^2 + jx_j + x_n^2 + nx_n,$$

tehát $x_n + x_j > u$. Ezzel beláttuk, hogy a végrehajtott csere során az $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ összeg csökken. Mivel legfeljebb $(n-1)$ cserével mindig eljuthatunk a $(0, 0, \ldots, 0, x)$ számokhoz, ahol

$$x = \frac{-n + \sqrt{n^2 + 4 \cdot 2010}}{2},$$

ezért az $x_1 + \ldots + x_n$ összeg legkisebb lehetséges értéke

$$\frac{-n + \sqrt{n^2 + 4 \cdot 2010}}{2}.$$

3. feladat: Határozzuk meg a

$$\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} = 3 - 4x^2$$

egyenlet valós megoldásait!

Szilágyi Judit és Nagy Örs (Kolozsvár)

3. feladat I. megoldása: Létezési feltételek: $x \neq 0$ és $1 - x^2 \geq 0$, azaz $D = [-1, 1] \setminus \{0\}$. $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = 3 - 4x^2 \iff \sqrt{1 - x^2} = 3x - 4x^3$. Mivel a bal oldal pozitív, ezért a jobb oldalnak is pozitívnak kell lennie, azaz $3x - 4x^3 = x(3 - 4x^2) \geq 0$, ahonnan a létezési feltételeket figyelembe véve $x \in \left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Négyzetre emelés és átcsoportosítás után a

$$16x^6 - 24x^4 + 10x^2 - 1 = 0$$

egyenlethez jutunk. Bevezetve a $t = x^2,\ t \geq 0$ jelölést, kapjuk, hogy

$$16t^3 - 24t^2 + 10t - 1 = 0.$$

Észrevehető, hogy $t_1 = \frac{1}{2}$ kielégíti az egyenletet, így a

$$\left(t - \frac{1}{2}\right)(16t^2 - 16t + 2) = 0$$

alakhoz jutunk, ahonnan $t_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ és $t_3 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$. Tehát

$$x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ x_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},\ x_{5,6} = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

A létezési feltételek alapján

$$M = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right\}.$$

3. feladat II. megoldása: A négyzetgyök létezéséhez szükséges, hogy $x \in [-1,1]$. így viszont létezik olyan $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, amelyre $x = \sin t$. A tört létezéséhez $x \neq 0$, tehát $t \neq 0$. Elvégezve az $x = \sin t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ helyettesítést a $\cos t = \sin 3t$ egyenlethez jutunk. Ez rendre a következőképpen alakítható:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3t\right) - \cos t = 0$$

$$-2\sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2t\right) = 0,$$

ahonnan a vizsgált intervallumban csak a

$$t_1 = \frac{\pi}{4},\quad t_2 = \frac{\pi}{8},\quad t_3 = -\frac{\pi}{8}$$

megoldások lehetségesek, tehát

$$M = \left\{\sin\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{8}, -\sin\frac{\pi}{8}\right\}$$

A $\sin t = \sqrt{\frac{1-\cos 2t}{2}}$ összefüggés alapján $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, tehát a megoldáshalmazt felírhatjuk

$$M = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right\}$$

alakban is.

4. feladat: Az $ABCD$ konvex négyszögben jelölje α a d_1 és d_2 hosszúságú AC, illetve BD átló által közrezárt szög mértékét. Mutassuk ki, hogy $ABCD$ akkor és csakis akkor négyzet, ha

$$(d_1 \sin A \sin C + d_2 \sin B \sin D)\cdot \sin\alpha = \sqrt{2(d_1^2 + d_2^2)}.$$

Longáver Lajos (Nagybánya)

4. feladat I. megoldása: A szinuszok majorálását, illetve a számtani és négyzetes középarányos közötti egyenlőtlenséget alkalmazzuk:

$$(d_1 \sin A \sin C + d_2 \sin B \sin D)\cdot \sin\alpha \leq$$

$$\leq d_1 \sin A \sin C + d_2 \sin B \sin D \leq$$

$$\leq d_1 + d_2 \leq 2\sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2}{2}} = \sqrt{2(d_1^2 + d_2^2)}.$$

Egyenlőséget pontosan akkor kapunk, ha

$$\sin A = \sin B = \sin C = \sin D = \sin\alpha = 1$$

és $d_1 = d_2$. Az $ABCD$ szögei pontosan akkor derékszögek, ha $ABCD$ téglalap, és egy téglalap átlói pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha az négyzet, tehát a bizonyítás teljes.

4. feladat II. megoldása: A Cauchy-Buniakovski-Schwarz egyenlőtlenség alapján

$$(d_1 \sin A \sin C + d_2 \sin B \sin D)^2 \leq$$

$$\leq \left(d_1^2 + d_2^2\right)\left(\sin^2 A \sin^2 C + \sin^2 B \sin^2 D\right) \leq 2\left(d_1^2 + d_2^2\right),$$

tehát a $\sin\alpha \leq 1$ egyenlőtlenség alapján következik, hogy

$$(d_1 \sin A \sin C + d_2 \sin B \sin D) \cdot \sin\alpha \leq \sqrt{2(d_1^2 + d_2^2)}.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

$$\sin A = \sin B = \sin C = \sin D = \sin\alpha = 1$$

és a Cauchy-Buniakovski-Schwarz egyenlőtlenségben is egyenlőség van. A szögek alapján következik, hogy a négyszög olyan téglalap, amelyben az átlók merőlegesek, vagyis négyzet. Ebben az esetben a Cauchy-Buniakovski-Schwarz egyenlőtlenségben is teljesül az egyenlőség.

Megjegyzés: A két megoldás gyakorlatilag nem sokban különbözik, de ha általánosítani próbáljuk a feladatot a megoldásból kiindulva, akkor különböző tulajdonságokhoz juthatunk a két megoldás alapján.

5. feladat: Adjuk meg az összes olyan háromszöget, amelyben mindhárom oldal hossza (méterben kifejezve) prímszám és a terület mérőszáma (négyzetméterben) egész szám!

Mészáros Alpár Richárd (Kolozsvár)

5. feladat megoldása: A megoldás során a szokásos jelöléseket használjuk. A Heron-képlet alapján

$$16T^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

Ha mindhárom oldal hossza legalább 3 lenne, akkor a jobb oldal páratlan és a bal oldal páros volna. Ez viszont ellentmondás, tehát a háromszögnek legalább az egyik oldala 2. A háromszög-egyenlőtlenség alapján csak a $2, 2, 2$ vagy $2, 2, 3$ illetve $2, p, p$ oldalhosszakkal rendelkező háromszögeket kell megvizsgálni, ahol p prímszám. Az első kettő területe irracionális, míg a harmadik esetben a $T^2 = p^2 - 1$ egyenlőséghez jutunk, ahonnan $(p-T)(p+T) = 1$ és ez csak $T = 0$, $p = 1$ esetén teljesülne, ami nem felel meg. Tehát nem létezik olyan háromszög, amelynek minden oldala prímszám és a területe egész szám.

Megjegyzés: Igazolható az is, hogy ha egy háromszög minden oldalának hossza prímszám, akkor a terület irracionális, pontosabban, ha minden oldal hossza páratlan, akkor a terület irracionális. A Heron-képlet alapján, ha T racionális, akkor T irreducibilis alakjában a nevező csak $1, 2$ vagy 4 lehet. Feltételezhetjük, hogy mindhárom oldal hossza legalább 3, mivel azoknak a háromszögeknek, amelyeknek legalább egy oldala 2 hosszúságú (és a másik kettő prím), a területét már megvizsgáltuk. Ha a nevező 1 vagy 2, akkor a jobb oldal páratlan és a bal oldal páros, tehát egyenlőség nem teljesülhet. Ha $T = \frac{u}{4}$, $u \in \mathbb{N}$, és u páratlan, akkor az

$$u^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = 4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2$$

egyenlethez jutunk, ahonnan

$$4b^2c^2 = u^2 + (b^2+c^2-a^2)^2.$$

Ez az egyenlőség nem teljesülhet, mert két páratlan négyzetszám összege $8M+2$ alakú és ez nem osztható 4-gyel.

6. feladat: Jelölje a_k a k pozitív egész szám legnagyobb páratlan osztóját.

a) Igazoljuk, hogy
$$\{a_{2^k}, a_{2^k+1}, \ldots, a_{2^{k+1}-1}\} = \{1, 3, 5, \ldots, 2^{k+1}-1\}.$$

b) Igazoljuk, hogy $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1} a_k = \frac{4^n-1}{3}$.

Dávid Géza (Székelyudvarhely)

6. feladat I. megoldása: a) Ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén
$$A_k = \{a_{2^k}, a_{2^k+1}, ..., a_{2^{k+1}-1}\},$$
akkor $A_0 = \{1\}$ és $A_1 = \{a_2, a_3\} = \{1, 3\}$. A bizonyításban matematikai indukciót használunk, tehát feltételezzük, hogy
$$A_{k-1} = \{1, 3, 5, \ldots, 2^k - 1\}.$$
Világos, hogy ha k páratlan, akkor $a_k = k$, míg $k = 2v$ esetén $a_k = a_v$. Ez alapján írhatjuk, hogy
$$A_k = \{a_{2^k}, a_{2^k+1}, ..., a_{2^{k+1}-1}\} =$$
$$= \{a_{2^k}, a_{2^k+2}, ..., a_{2^{k+1}-2}\} \cup \{a_{2^k+1}, ..., a_{2^{k+1}-1}\} =$$
$$= \{a_{2^{k-1}}, a_{2^{k-1}+1}, ..., a_{2^k-1}\} \cup \{2^k+1, ..., 2^{k+1}-1\} =$$
$$= A_{k-1} \cup \{2^k+1, ..., 2^{k+1}-1\} =$$
$$= \{1, 3, 5, ..., 2^{k+1}-1\}.$$

b) Az A_{n-1} elemeinek összege
$$1 + 3 + \ldots + (2^n - 1) = (2^{n-1})^2 = 4^{n-1},$$
tehát az $S_n = \sum\limits_{k=1}^{2^n-1} a_k$ sorozat teljesíti az $S_{n+1} = S_n + 4^n$ rekurziót. Ez alapján
$$S_n = 1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^{n-1} = \frac{4^n-1}{3}.$$

6. feladat II. megoldása: a) Jelölje H_1 a bizonyítandó egyenlőség bal oldalán megjelenő halmazt és H_2 a jobb oldalon megjelenő halmazt. Világos, hogy $H_1 \subseteq H_2$ és H_1 pontosan akkor tartalmaz
$$(2^{k+1} - 1) - (2^k - 1) = 2^k$$
elemet, ha az $a_{2^k}, a_{2^k+1}, \ldots, a_{2^{k+1}-1}$ számok páronként különböznek. Másrészt, ha az $x > y$ számok legnagyobb páratlan osztója ugyanaz, akkor létezik olyan $v \in \mathbb{N}^*$, amelyre $x = 2^v \cdot y$. Ez viszont nem lehetséges, ha $2^k \leq x, y \leq 2^{k+1} - 1$, mivel $2^k \leq y \leq 2^{k+1} - 1$ esetén $2y \geq 2^{k+1}$. így a két halmaz egyenlő, mivel ugyanannyi elemet tartalmaznak és $H_1 \subseteq H_2$.

b) $$\sum_{k=1}^{2^n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} a_i\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{2^k}(2j-1)\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(2^{k-1}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} 4^{k-1} = \frac{4^n-1}{3}.$$

Megjegyzések: 2^k és $2^{k+1} - 1$ közt a számokat osztályozhatjuk aszerint, hogy 2-nek milyen hatványával oszthatók. Ha a 2 kitevője szerint csökkenő sorrendbe rendezzük és az azonos kitevő esetén növekvő sorrendbe, akkor gyakorlatilag a legnagyobb páratlan osztó szerinti növekvő sorrendet kapjuk. Például 32-től 63-ig a számokat a következőképpen osztályozhatjuk:

32-vel oszthatók: $32 = 32 \cdot 1$,

16-tal oszthatók: $48 = 16 \cdot 3$,

8-cal oszthatók: $40 = 8 \cdot 5$, $56 = 8 \cdot 7$,

4-gyel oszthatók: $36 = 4 \cdot 9$, $44 = 4 \cdot 11$, $52 = 4 \cdot 13$, $60 = 4 \cdot 15$

2-vel oszthatók: $34 = 2 \cdot 17$, $38 = 2 \cdot 19$, $42 = 2 \cdot 21$, $46 = 2 \cdot 23$, $50 = 2 \cdot 25$, $54 = 2 \cdot 27$, $58 = 2 \cdot 29$, $62 = 2 \cdot 31$

és végül a 2-vel nem oszthatók:

$$33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, ..., 61, 63.$$

Látható, hogy ezáltal 32-től 63-ig a természetes számokat a legnagyobb páratlan osztóik szerinti növekvő sorrendbe rendeztük.

A 2^k és $2^{k+1} - 1$ közötti természetes számok 2-es számrendszerbeli reprezentációja $(k+1)$ számjegyet tartalmaz, és egy számból a legnagyobb páratlan osztót úgy kapjuk meg, hogy elhagyjuk a végéről a 0-kat. Emiatt nyilvánvaló a $H_1 = H_2$ egyenlőség.