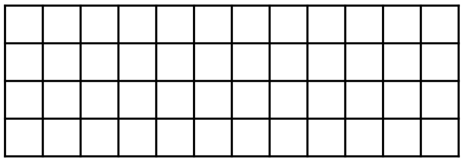
XIX. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Szatmárnémeti, 2010. március 19-22.

10. osztály

1. feladat: Legalább hány szeget kell beütni az alábbi farács rácspontjaiba ahhoz, hogy biztosan legyen köztük 4 szeg, amely egy téglalapot feszít ki?



Nagy Örs (Kolozsvár)

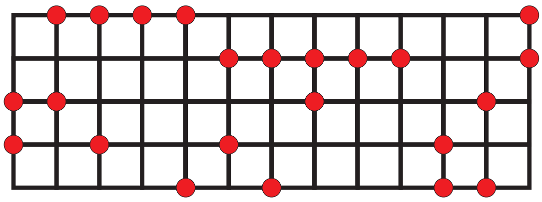
1. feladat megoldása: Tételezzük fel, hogy a lehető legtöbb szeget beütöttük a rácspontokba anélkül, hogy azok valamilyen téglalapot feszítenének ki. Jelöljük m-mel az egy függőleges (lásd a mellékelt ábrát) rácsegyenesre illeszkedő szegek maximális számát.

Ha $m = 5$, akkor 12 függőleges rácsegyenes csak egy-egy szeget tartalmazhat, különben keletkezne olyan téglalap, amelynek oldalai párhuzamosak a rácsegyenesekkel és a csúcsaiban van egy-egy szeg. így $m = 5$ esetén 18 szeg már biztosítaná a téglalap keletkezését.

Ha $m = 4$, akkor további 4 függőleges rácsegyenes tartalmazhat $2 - 2$ szeget és a többi legfeljebb 1-et (különben ismét keletkezne olyan téglalap, amelynek oldalai a rácsegyenesekkel párhuzamosak). így ebben az esetben 21 szeg biztosítaná a téglalap keletkezését.

Ha $m = 3$, akkor két esetet kell megvizsgálni aszerint, hogy hány függőleges rácsegyenes tartalmaz 3 szeget. Ha két ilyen rácsegyenes is van, akkor csak további 4 függőleges rácsegyenes tartalmazhat 2 szeget és az összes többi legfeljebb 1-et (különben ismét keletkezne olyan téglalap, amelynek oldalai a rácsegyenesekkel párhuzamosak). Ebben az esetben 22 szeg esetén már megjelenne legalább egy téglalap. Ha csak egy függőleges rácsegyenes tartalmaz 3 szeget, akkor további 7 függőleges rácsegyenes tartalmazhat $2 - 2$ szeget és az összes többi legfeljebb 1-et. Ebben az esetben 23 szeg esetén megjelenne olyan téglalap, amelynek oldalai párhuzamosak a rácsegyenesekkel.

Ha $m = 2$, akkor mivel az 5 vízszintes egyenesből 10 féleképpen választhatunk ki kettőt, ezért 10 függőleges rácsegyenesen lehet $2 - 2$ pont és a többin $1 - 1$. Ez összesen 23 pont, tehát itt csak 24 pont esetén jelenne meg olyan téglalap, amelynek oldalai párhuzamosak a rácsegyenesekkel. Ugyanakkor természetes, hogy más téglalapok is keletkezhetnek, tehát ahhoz, hogy a megoldás teljes legyen kell egy olyan elhelyezést találni a 23 szegre, amikor semmilyen téglalapot nem feszítenek ki (tehát nemcsak olyat nem, amelynek az oldalai a rácsegyenesekkel párhuzamosak). Egy ilyen elhelyezés látható a mellékelt ábrán.



Ha $m = 1$, akkor világos, hogy legfeljebb 13 szeg lenne a farácson, tehát a feladatban megfogalmazott kérdésre a válasz 24.

2. feladat: Határozzuk meg azokat az $x, y \in \mathbb{N}$ számokat, amelyekre

$$xy(x - y) = 13x + 15y.$$

Kacsó Ferenc (Marosvásárhely)

2. feladat I. megoldása: A $(0,0)$ megoldása az egyenletnek és ha x, y közül az egyik nulla, akkor a másik is nulla, tehát a továbbiakban feltételezhetjük, hogy $x \neq 0 \neq y$. Két esetet tárgyalunk aszerint, hogy y osztható 13-mal vagy sem.

1. eset. Ha y osztható 13-mal, akkor létezik $a \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $y = 13a$, tehát $x = a(x^2 - 13ax - 15)$. Ez csak akkor lehetséges ha $a|x$, vagyis létezik $b \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $x = ab$. Visszahelyettesítés után a

$$15 = b(a^2b - 13a^2 - 1)$$

egyenlőséghez jutunk és innen következik, hogy $b|15$, ezért $b \in \{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$. A négy eset kipróbálása után csak $b = 15$ esetén kapunk a-nak is természetes értéket, tehát $x = 15$ és $y = 13$.

2. eset. Ha y nem osztható 13-mal, akkor

$$13x = y(x^2 - xy - 15)$$

alakba írható, és mivel y relatív prím a 13-mal, az x osztható kell legyen az y-nal. így létezik $k \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $x = ky$ és ezt visszahelyettesítve a $15 = k(ky^2 - y^2 - 13)$ egyenlethez jutunk, ahonnan $k|15$, tehát $k \in \{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$. Innen a megoldások $x = 9,\ y = 3;\ x = 10,\ y = 2;\ x = 15,\ y = 1$.

összesítve, az egyenletnek a következő megoldásai lehetségesek:

$$M = \{(0,0), (15,13), (9,3), (10,2), (15,1)\}.$$

2. feladat II. megoldása: Az egyenlet alapján $x|15y$ és $y|13x$. Ha d az x és y legnagyobb közös osztója és $d = 1$, akkor $y \in \{1, 13\}$. $y = 1$ esetén $x = 15$ és $y = 13$ esetén szintén az $x = 15$ megoldáshoz jutunk. Ha $d > 1$, akkor létezik olyan $x_1, y_1 \in \mathbb{N}$, amelyre x_1 és y_1 relatív prímek valamint $x = dx_1$ és $y = dy_1$, tehát az egyenlet

$$d^2 x_1 y_1 (x_1 - y_1) = 13x_1 + 15y_1$$

alakban írható. Ez alapján $y_1|13$, tehát $y_1 \in \{1, 13\}$.

$y_1 = 1$ esetén az

$$x_1\left(d^2(x_1 - 1) - 13\right) = 15$$

egyenlethez jutunk, ahonnan $x_1 \in \{1, 3, 5, 15\}$. Az $x_1 = 1$ eset nem felel meg és a többi esetből rendre a $d = 3$, $d = 2$, illetve $d = 1$ értékekhez jutunk.

$y_1 = 13$ esetén az

$$x_1\left(d^2(x_1 - 13) - 1\right) = 15$$

egyenlethez jutunk, ahonnan $x_1 \geq 14$ és $x_1|15$, tehát csak az $x_1 = 15$ esetet szükséges vizsgálni. Ebben az esetben $d = 1$, tehát nem jutunk újabb megoldáshoz. összesítve

$$M = \{(0,0), (15,13), (9,3), (10,2), (15,1)\}.$$

3. feladat: Adott a síkon négy pont úgy, hogy közülük semelyik három sincs egy egyenesen. Kiszíneztük a négy pontot négy színnel: pirossal, kékkel, zölddel, és sárgával. Ezután kiszíneztük a pontok által meghatározott szakaszokat is úgy, hogy azok színe megegyezett valamelyik végpontjuk színével, és közben mind a négy színt újra felhasználtuk. Igaz-e, hogy mindig van olyan pont, hogy

(1) vagy a belőle kiinduló szakaszok közül,

(2) vagy a másik három pont közti szakaszok közül

az egyik piros, a másik kék, a harmadik zöld?

dr. Kántor Sándorné (Debrecen)

3. feladat megoldása: Tekintsük a piros, kék és zöld pontokat. Ha az ezek által meghatározott három szakasz piros, kék, illetve zöld színű, akkor a feladat második állítása igaz a sárga pontra. Vizsgáljuk azokat az eseteket, amelyekre nem teljesül a (2) állítás a sárga pontra. Mivel minden szakasz színe megegyezik valamelyik végpontjának a színével, ez csak úgy lehet, ha a piros, kék és zöld pontok által meghatározott 3 szakasz közül 2 azonos színű. Mivel a színek szerepe azonos, feltehetjük, hogy a 3 szakasz közül 2 piros, 1 pedig kék színű. Tekintsük ezután a zöld pontot. Mivel minden pontból indul saját színű szakasz (hisz a színezés során mind a 4 színt felhasználjuk), ezért a zöld pontból indul ki zöld szakasz. Ezek szerint a zöld pontban egy piros, egy kék és egy zöld szakasz találkozik, tehát a zöld pontra az (1) állítás igaz.

4. feladat: Mennyi azoknak a pozitív egészeknek az összege, amelyek 2010-nél nem nagyobbak, és számjegyeik összege páratlan?

Fejér Szabolcs (Miskolc)

4. feladat megoldása: Jelölje $S(n)$ az n szám számjegyeinek összegét! Legyen $n < 1000$. Ekkor két fontos állítást fogalmazhatunk meg.

1) Ha $S(n)$ páros, akkor $S(999 - n)$ páratlan (a kivonásnál sehol sincs átvitel).

2) Ha $S(n)$ páros, akkor $S(1000 + n)$ páratlan.

Tehát az első állítás miatt a $H = \{0,\ 1, \ldots, 999\}$ halmaz elemei közül pontosan 500 páros összegű, 500 páratlan. A második állítás miatt a H halmaz páros összegű számaihoz 1000-t adva kapunk páratlan összegű számot (szintén 500-at), ezek lesznek a $K = \{1000,\ 1001, \ldots, 1999\}$ halmaz páratlan összegű számai. A kívánt összeget 2000-ig, úgy kapjuk, hogy a H halmaz elemeinek összegéhez hozzáadunk $500 \cdot 1000$-t. A keresett összeg tehát

$$\frac{1000 \cdot 999}{2} + 500 \cdot 1000 + 2001 + 2003 + 2005 + 2007 + 2009 + 2010,$$

vagyis 1011535.

5. feladat: Legyen hat, nem feltétlenül egyforma sugarú, kör egy síkban. Igazoljuk, hogy ha a hat körnek van közös belső pontja, akkor az egyik kör középpontja egy másik belsejében van.

Mátyás Mátyás (Brassó)

5. feladat megoldása: Legyen P egy pont, amelyik mind a hat kör belsejében megtalálható. Az egyik tetszőlegesen választott körtől elindulva, és az óramutató járásával ellentétes irányba haladva P körül, jelölje $\mathcal{C}_i(O_i, R_i), 1 \leq i \leq 6$ a köröket. Ekkor

$$m(\widehat{O_1PO_2}) + m(\widehat{O_2PO_3}) + \ldots + m(\widehat{O_5PO_6}) + m(\widehat{O_6PO_1}) = 2\pi.$$

Ha mind a hat fenti szög mértéke megegyezik $\frac{\pi}{3}$-mal akkor az O_iPO_{i+1}, $1 \leq i \leq 6$ $(O_7 = O_1)$ háromszögekben

$$O_iO_{i+1} \leq \max\{PO_i, PO_{i+1}\} < \max\{R_i, R_{i+1}\}.$$

Ha $R_i \leq R_{i+1}$, akkor az O_i pont a $\mathcal{C}_{i+1}(O_{i+1}, R_{i+1})$ kör belsejében található, különben az O_{i+1} pont található a $\mathcal{C}_i(O_i, R_i)$ kör belsejében.

Ha nem mind a hat szög mértéke $\frac{\pi}{3}$, akkor létezik $1 \leq i \leq 6$ úgy, hogy $m(\widehat{O_iPO_{i+1}}) < \frac{\pi}{3}$. Az $O_iO_{i+1}P$ háromszögben teljesül, hogy

$$m(\widehat{O_iPO_{i+1}}) < \max\{m(\widehat{PO_iO_{i+1}}),\ m(\widehat{PO_{i+1}O_i})\}$$

Mivel a háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik, ezért az $O_iO_{i+1}P$ háromszögben teljesül, hogy

$$O_iO_{i+1} < \max\{PO_i,\ PO_{i+1}\}.$$

Ugyanakkor a P pont a $\mathcal{C}_i(O_i, R_i)$ és a $\mathcal{C}_{i+1}(O_{i+1}, R_{i+1})$ körök belsejében található, tehát $PO_i < R_i$ és $PO_{i+1} < R_{i+1}$. így

$$O_iO_{i+1} < \max\{R_i, R_{i+1}\}.$$

Ha $R_i \leq R_{i+1}$, akkor az O_i pont a $\mathcal{C}_{i+1}(O_{i+1}, R_{i+1})$ kör belsejében található, különben az O_{i+1} pont található a $\mathcal{C}_i(O_i, R_i)$ kör belsejében.

6. feladat: Adott az ABC háromszög, amelyben $AB = AC$ és $BAC\sphericalangle = 20°$. Az AC oldalon felvesszük a D és E pontokat úgy, hogy $AD = BC$ és BE az $ABC\sphericalangle$ szögfelezője. Legyen F és K a BD, illetve DE szakasz felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy az $EFK_\triangle$ egyenlő oldalú.

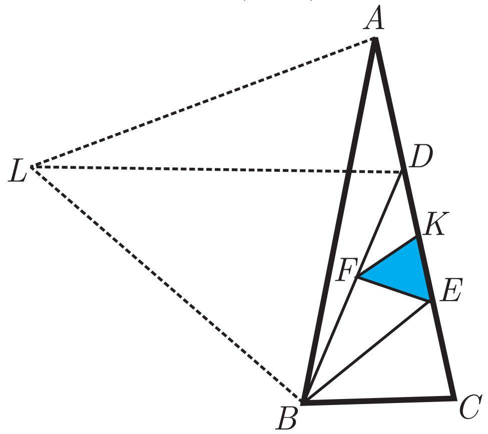
Olosz Ferenc (Szatmárnémeti)

6. feladat I. megoldása: Segédszerkesztést végzünk: megszerkesztjük az ABC háromszöggel kongruens (egybevágó) LDA háromszöget (L és B az AC egyeneshez viszonyítva ugyanabban a félsíkban helyezkednek el).

Az ABC és LDA egyenlő szárú háromszögekben

$$AB = AC = LA = LD,$$

az alapokon fekvő szögek $80°$-osak. $AL = AB$ és $m(\widehat{LAB}) = 80° - 20° = 60°$, innen következik, hogy az $ALB_{\triangle}$ egyenlő oldalú, tehát $LA = LB = LD$ és $m(\widehat{DLB}) = 60° - 20° = 40°$.



Az LBD egyenlő szárú háromszögben az alapon fekvő szögek $m(\widehat{LBD}) = m(\widehat{LDB}) = 70°$, ahonnan következik, hogy

$$m(\widehat{BDC}) = 180° - (80° + 70°) = 30°$$

és $m(\widehat{ABD}) = 70° - 60° = 10°$, így $m(\widehat{DBE}) = \frac{80°}{2} - 10° = 30°$.

Tehát EBD egyenlő szárú háromszög és a BD alap felezőpontja F, így EF merőleges a BD-re, ahonnan következik, hogy FK az EFD derékszögű háromszögben oldalfelező (súlyvonal), tehát $FK = KE$ és $m(\widehat{FED}) = 90° - 30° = 60°$ vagyis EFK egyenlő oldalú háromszög.

6. feladat II. megoldása: Gondolkodjunk visszafele: Mire lenne szükség ahhoz, hogy EFK egyenlő oldalú legyen? Mivel BE felezi az ABC szöget, ezért $m(\widehat{EBC}) = 40°$, tehát $m(\widehat{BEC}) = 60°$ és így az $\widehat{FEK}$ mértéke pontosan akkor lenne $60°$, amikor FE szögfelező is a DEB háromszögben. Mivel F a BD felezőpontja, ez pontosan akkor teljesül, ha a BED háromszög egyenlő szárú. Ehhez elégséges belátni, hogy a $\widehat{DBE}$ mértéke $30°$ vagy az $\widehat{ABD}$ mértéke $10°$. Tehát a feladat visszavezetődik a következő tulajdonságra:

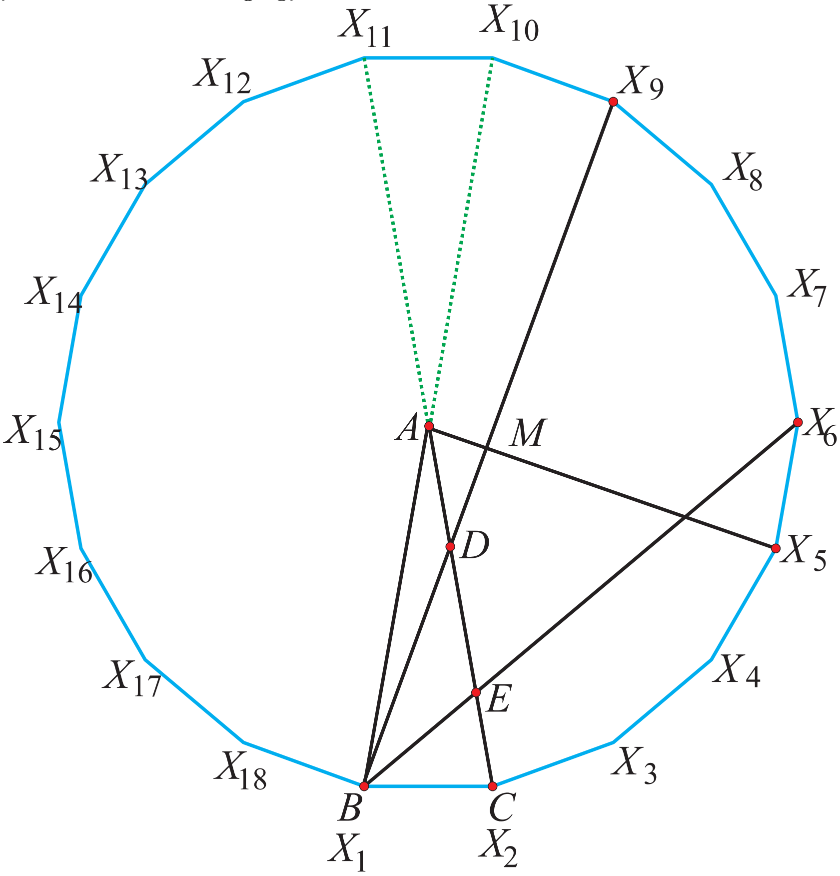
Tekintjük az ABC háromszöget, amelyben $AB = AC$ és $m(\widehat{BAC}) = 20°$. Az AC oldalon felvesszük a D pontot. Igazoljuk, hogy az $AD = BC$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $m(\widehat{ABD}) = 10°$.

Amiatt, hogy a D pont egyértelműen szerkeszthető az $AD = BC$ egyenlőség alapján is és a $m(\widehat{ABD}) = 10°$ egyenlőség alapján is, elégséges igazolni, hogy ha $m(\widehat{ABD}) = 10°$, akkor $AD = BC$. Ez belátható a szinusztétel segítségével, hisz az ABD háromszögben $AD = AB\frac{\sin 10°}{\sin 30°}$. Másrész $\frac{BC}{2} = AB \sin 10°$, tehát $AD = BC$.

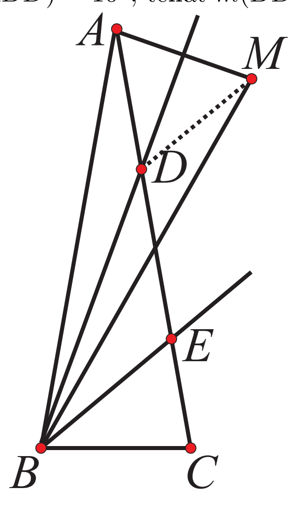
Megjegyzés: Az $AD = BC$ egyenlőség belátható csak kongruencia segítségével, ha megszerkesztjük az A-ból a BD-re és a BC-re húzott merőlegeseket.

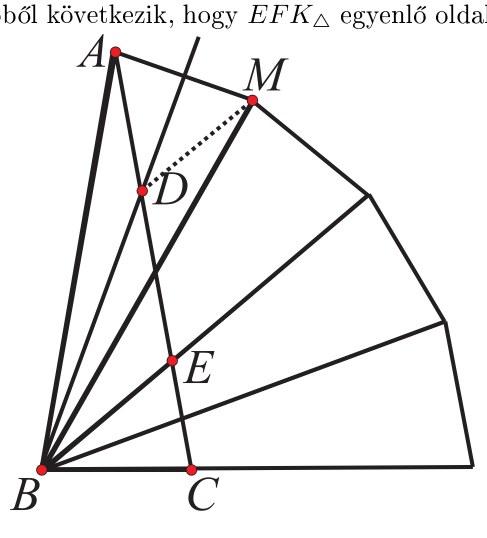
6. feladat III. megoldása: Az ABC háromszög tekinthető egy szabályos 18 oldalú sokszög részének, amint a mellékelt ábra mutatja (A a sokszög köré írt kör középpontja, B és C két egymás melletti csúcs). Ha ebben a sokszögben meghúzzuk az X_1X_9 átlót és az AX_5 szakaszt, akkor $AX_5 \perp X_1X_9$ (mert $X_5X_1 = X_5X_9$). Ugyanakkor az X_1X_9 és X_2X_{11} átlók szöge $30°$-os, tehát ha $\{D\} = X_1X_9 \cap X_2X_{11}$ és $\{M\} = AX_5 \cap X_1X_9$, akkor az ADM derékszögű háromszögben $AM = \frac{AD}{2}$. Másrészt az $X_1X_9X_{10}$ háromszögben AM középvonal, tehát $AM = \frac{X_9X_{10}}{2}$. Ez alapján $AD = X_9X_{10} =$

$X_1X_2 = BC$, tehát az X_2X_{11} és X_1X_9 átlók metszéspontja megegyezik a feladatban (az $AD = BC$ feltétel alapján) megszerkesztett D ponttal. így világos, hogy $m(\widehat{DBE}) = m(\widehat{EDB}) = 30°$, és ez alapján következik, hogy az EFK háromszög egyenlő oldalú.



6. feladat IV. megoldása: Szerkesszük meg az M pontot úgy, hogy $m(\widehat{MAB}) = 80°$ és $MB = AB$ (M és C az AB-hez viszonyítva ugyanabban a félsíkban van). A szerkesztés alapján a BAM háromszög egybevágó az ABC háromszöggel, tehát $MA = BC$. A szerkesztés alapján $m(\widehat{MAC}) = 60°$, tehát az MAD háromszög egyenlő oldalú. így D és B az MA oldalfelező merőlegesén van, tehát a BAM egyenlő szárú háromszögben BD az ABM szög szögfelezője. Ez alapján $m(\widehat{ABD}) = 10°$, tehát $m(\widehat{BDE}) = m(\widehat{DBE}) = 30°$ és ebből következik, hogy $EFK_\triangle$ egyenlő oldalú.





Megjegyzések: A jobb oldali ábrán látható, hogy a negyedik megoldás alapötlete ugyanaz, mint a harmadik megoldás alapötlete, pontosabban a szabályos 18 oldalú sokszögbe való beágyazás. A két beágyazás a sokszögnek a háromszöghöz viszonyított helyzetében különbözik.

A második megoldásban, ha nem a fordított irányt vizsgáljuk, hanem az $AD = BC$ feltétel alapján szeretnénk meghatározni a $\widehat{ABD}$ szög mértékét, akkor az $\alpha = m(\widehat{ABD})$ jelöléssel a

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + 20^\circ)} = \frac{\sin 10^\circ}{\sin 30^\circ}$$

egyenlethez jutunk (az ABD_Δ és az eredeti háromszögben felírt szinusztétel alapján). Származtatással a $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 10^\circ$ egyenlőséget kapjuk, ahonnan $\alpha = 10^\circ$.