XIX. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Szatmárnémeti, 2010. március 19-22.

9. osztály

1. feladat: Mennyi a következő tört értéke?

$$\frac{2010201020102011 \cdot 4020402040204021 - 2010201020102010}{2010201020102010 \cdot 4020402040204021 + 2010201020102011}$$

dr. Katz Sándor (Bonyhád)

1. feladat megoldása: Látható, hogy a törtkifejezésben szereplő számok a 2010201020102010, az ennél eggyel nagyobb és a kétszeresénél eggyel nagyobb szám. Jelöljük ezért a 2010201020102010 számot n-nel. Ekkor a tört:

$$\frac{(n+1)(2n+1)-n}{n(2n+1)+n+1} = \frac{2n^2+2n+n+1-n}{2n^2+n+n+1} =$$

$$= \frac{2n^2+2n+1}{2n^2+2n+1} = 1.$$

Megjegyzés: Ha a 2010201020102011 számot jelöljük m-mel, akkor a

$$\frac{m(2m-1)-(m-1)}{(m-1)(2m-1)+m} = 1$$

törtet kapjuk és ha a 4020402040204021 számot jelöljük p-vel, akkor a

$$\frac{\frac{p+1}{2}p - \frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{2}p + \frac{p+1}{2}} = 1$$

törthöz jutunk. Minden esetben a törtben megjelenő számok közti összefüggések észrevétele a lényeges.

2. feladat: Meseországban fityinggel és fabatkával lehet vásárolni, ahol 1 fitying 2010 fabatkát ér. Fajankó és Vasgyúró összehasonlítják megtakarított pénzüket. Mindketten megszámolják fityingjeiket és fabatkáikat, majd megállapítják, hogy egyiküknek sincs 2010-nél több fityingje, és hogy Vasgyúró vagyona 1003 fabatkával több, mint Fajankó vagyonának kétszerese. Fajankónak annyi fityingje van, ahány fabatkája van Vasgyúrónak, és annyi fabatkája, ahány fityingje van Vasgyúrónak. Mennyi megtakarított pénze van Fajankónak?

dr. Péics Hajnalka (Szabadka)

2. feladat megoldása: Legyen Fajankónak x fityingje és y fabatkája. Ekkor Vasgyúrónak y fityingje és x fabatkája van. A megadott feltétel szerint ekkor

$$2010y + x - 1003 = 2(2010x + y),$$

ahonnan rendezés után $2008(y - 2x) = 3x + 1003$ adódik. Két esetet különböztetünk meg:

1. eset. Ha $y - 2x = 1$, akkor $3x + 1003 = 2008$, ahonnan $x = 335$ és $y = 671$.

2. eset. Ha $y - 2x \geq 2$, akkor $3x + 1003 \geq 2 \cdot 2008 = 4016$, azaz $x \geq \frac{3013}{3}$. Ekkor $y \geq 2 + 2x \geq 2 + 2 \cdot \frac{3013}{3} \geq 2010$, ami ellentmondást jelent a feltételekkel.

Tehát Fajankónak 335 fityingje és 671 fabatkája van.

3. feladat: Oldjuk meg az $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz} - 1$ egyenletet, ha x, y, z egész számok!

Bíró Bálint (Eger)

3. feladat I. megoldása: Nyilvánvaló, hogy az x, y, z egész számok egyike sem lehet 0. Szorozzuk be az egyenletet az $xyz \neq 0$ kifejezéssel! Ekkor először az $yz - xz + xy = z + x - xyz$, majd 0-ra rendezve az

$$yz - z + xyz - xz + xy - x = 0$$

egyenletet kapjuk. A bal oldalon $(y-1)$ kiemelhető és így az

$$(y-1)(z + xz + x) = 0$$

egyenlethez jutunk.

1. eset. Ha $y - 1 = 0$, akkor $y = 1$ és a $z + xz + x$ kifejezés értéke tetszőleges egész szám lehet, tehát x és z értékének is tetszőleges, 0-tól különböző egész számot választhatunk.

2. eset. Ha $z + xz + x = 0$, akkor

$$z + xz + x + 1 = (x+1)(z+1) = 1.$$

Mivel x és y egész számok, ezért $x + 1 = 1$ és $z + 1 = 1$ vagy $x + 1 = -1$ és $z + 1 = -1$. Az első esetben $x = z = 0$ adódik és ez nem lehetséges. A második esetben $x = z = -2$ és visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe látható, hogy tetszőleges $y \neq 0$ esetén teljesül az egyenlőség, tehát a feladat megoldásainak halmaza

$$M = \{(x, 1, z) | x, z \in \mathbb{Z}^*\} \cup \{(-2, y, -2) | y \in \mathbb{Z}^*\}.$$

3. feladat II. megoldása: A tagok csoportosításával az

$$\frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{y}\right) + \left(1 - \frac{1}{y}\right) = 0$$

egyenlethez jutunk, tehát az

$$\left(1 - \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} + 1\right) = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. Ha $y = 1$, akkor x és z tetszőleges lehet, különben az $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 1$ egyenlőségnek kell teljesülnie. $|x| > 2$ és $|z| > 2$ esetén $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} < 1$. Ugyanakkor ha $|x| = 1$ vagy $|z| = 1$, akkor ellentmondáshoz jutunk, tehát csak a $|x| = 2$ esetet kell megvizsgálni. Ebben az esetben az $x = z = -2$ megoldáshoz jutunk, tehát

$$M = \{(x, 1, z) | x, z \in \mathbb{Z}^*\} \cup \{(-2, y, -2) | y \in \mathbb{Z}^*\}.$$

4. feladat: A dubai Burj Khalifa felhőkarcoló 160 emeletes. Induljon el egy lift a földszintről, és tételezzük fel, hogy útja során minden emeleten pontosan egyszer áll meg. Mennyi az a leghosszabb út, amit eközben megtehet, ha két szomszédos emelet közti távolság 4 méter?

Fejér Szabolcs (Miskolc)

4. feladat I. megoldása: Vizsgáljuk meg például, hogy legfeljebb hányszor teheti meg a $[20, 21]$ emeleti intervallumot! Ha a lift felfelé mozog, akkor a „START” állomás lehet a $0, 1, \ldots, 20$ sorszámú emelet, a „CÉL” pedig a $21, 22, \ldots, 160$. Mivel minden emeleten pontosan egyszer állhat meg, ezért legfeljebb 21-szer mehet át ezen a szakaszon úgy, hogy felfele halad. Ha lefelé mozog, akkor a „START” állomás a $21, 22, \ldots, 160$ emeletek, a „CÉL” pedig az $1, 2, \ldots, 20$ emelet, így lefelé legfeljebb 20-szor haladhat át. Ez összesen maximum 41 eset. A $[79, 80]$ intervallumon felfelé a „START” lehet $0, 1, \ldots, 79$ (ez 80 eset), a „CÉL” pedig $80, 81, \ldots, 160$ (81 eset), ezért legfeljebb 80-szor haladhat át ezen a szakaszon. Lefelé a „START” ugyancsak 81, a „CÉL” pedig 79, így összesen legfeljebb $80+79$-szer mehet át. Ha egy emelettel feljebb megyünk, a $[80, 81]$ szakaszra, akkor felfelé „START” 81 féle, „CÉL” 80 féle, tehát maximum 80-szor mehet át felfelé menetben. Lefelé „START” 80 féle, „CÉL” 80 féle, tehát összesen legfeljebb $80+80$ féleképpen mehet át ezen a szakaszon. Minden e fölötti szintre igaz, hogy az intervallum fölött kevesebb megálló van, így ez határozza meg a lehetséges maximális esetek számát.

Összefoglalva tehát az $[i-1,i]$ szintek között a lift legfeljebb $2i-1$-szer mehet át, ha $1\le i\le 80$, és $2(161-i)$-szer, ha $81\le i\le 161$. így a lehető leghosszabb út nem haladhatja meg a

$$4(1+3+\ldots+159+160+158+\ldots+2)$$

métert, vagyis a $\frac{4\cdot 160\cdot 161}{2}=51520$ métert.

Másrészt ez létre is jöhet, ha a megállók sorban $0,160,1,159,\ 2,158,\ldots,79,81,80$.

4. feladat II. megoldása: Jelölje x_i az i-edik megállónak megfelelő emelet számát. Két egymásutáni megálló közti távolság $4|x_i-x_{i+1}|$. Másrészt

$$|x_i-x_{i+1}|+|x_{i+1}-x_{i+2}|=|x_i-x_{i+2}|$$

ha az $(i+1)$-edik megállónál a lift nem változtat irányt. Ez azt mutatja, hogy $x_i<x_{i+1}<x_{i+2}$ vagy $x_i>x_{i+1}>x_{i+2}$ esetén növelhető az útvonal hossza, ha az $(i+1)$-edik megállót máshová tennénk a megállók sorozatában. így a leghosszabb útvonal esetén (ami létezik, mivel véges sok különböző útvonal van) az

$$S=4\left(|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+\ldots+|x_{160}-x_{161}|\right)$$

kifejezésben a moduluszok felbontása után az x_i, $2\le i\le 160$ számok kétszerese jelenik meg pozitív vagy negatív előjellel és kifejtésben szereplő együtthatók összege 0 (pozitív előjelű 80 darab van, mindegyik $+2$ együtthatóval, míg negatív 81 darab van, ebből 79 együtthatója -2 és 2 együtthatója -1). Ez akkor a legnagyobb, ha a nagy számok jelennek meg pozitív előjellel és a kicsik negatív előjellel. Pontosabban akkor a lehető legnagyobb, ha a $81,82,\ldots,160$ számok vannak pozitív előjellel és a $0,1,2,\ldots,80$ számok negatív előjellel. Ez el is érhető ha a megállókat úgy rakjuk sorba, hogy bármely két egymásutáni megálló közt haladjon át a 80-as szinten. Ebben az esetben ugyanis a moduluszok felbontása után a 80-nál nagyobbak mind pozitív előjelűek lesznek és a 80-nál nem nagyobbak mind negatív előjelűek.

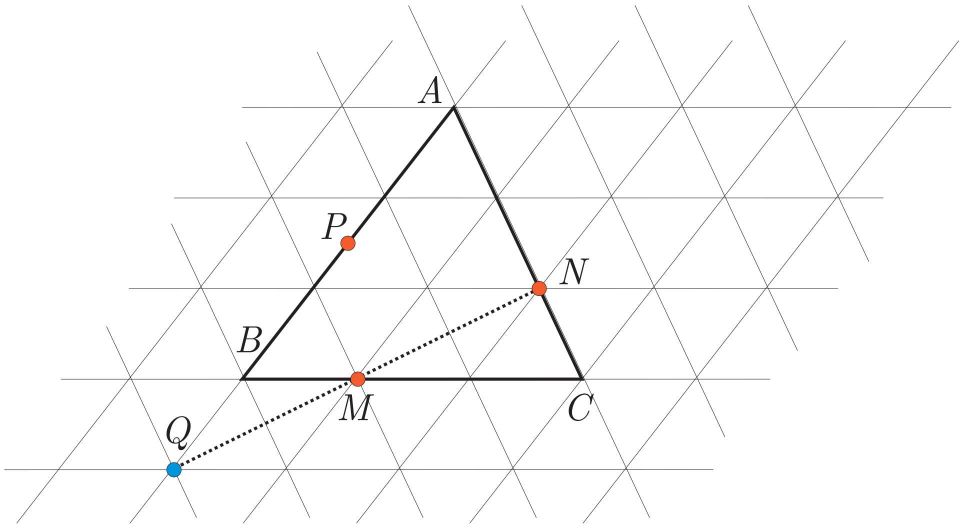
Megjegyzés: A második megoldás mutatja, hogy nemcsak az első megoldásban megadott sorrend esetén jön ki a leghosszabb útvonal, hanem sok más esetben is.

5. feladat: Az ABC háromszög AC és BC oldalán felvesszük a C-hez, illetve B-hez közelebb eső N és M harmadolópontot, valamint az AB oldal P felezőpontját, majd az eredeti háromszöget kitöröljük. Szerkesszük vissza az M,N és P pont alapján az eredeti háromszöget!

Kovács Lajos (Székelyudvarhely)

5. feladat I. megoldása: Képzeljük el, hogy a háromszög a mellékelt ábrán látható végtelen rács része. így, ha Q az N szimmetrikusa az M-re nézve, akkor a PQ egyenes egybeesik az AB egyenessel, és B a PQ-t öt egyenlő részre osztó pontok közül a második (a Q-tól kezdve). Ez viszont megszerkeszthető és a szerkesztés a következő lépésekre bontható:

- megszerkesztjük az N-nek az M-re vonatkozó Q szimmetrikusát;
- megszerkesztjük a PQ szakasznak azt a B pontját, amelyre $QB=\frac{2}{5}PQ$;
- a QP meghosszabbításán felmérjük a $PA=PB$ szakaszt;
- a BM és AN egyenesek metszéspontja a C pont.



5. feladat II. megoldása: Ha a megfelelő kisbetűkkel jelöljük a csúcsok helyzetvektorait, akkor $3m = 2b + c$, $3n = 2c + a$ és $2p = a + b$. így $b = \frac{1}{5}(2p - 3n + 6m)$, vagyis ha M-et választjuk a helyzetvektorok kezdőpontjának, akkor $b = \frac{1}{5}(2p - 3n)$ és ez éppen az első bizonyításbeli tulajdonság (vagyis B a PQ-t $3:2$ arányban osztó pont). Ha nem választjuk M-et kezdőpontnak, akkor az N-nek az O kezdőpontra vonatkozó Q szimmetrikusa esetén megszerkesztendő a PQ-nak az R pontja, amely a PQ szakaszt $3:2$ arányban osztja, majd az r-hez hozzá kell adni a $\frac{6}{5}m$ vektort.

Megjegyzés: A második megoldáshoz hasonló gondolatmenetet használhatunk akkor is, ha analitikus geometriai eszközöket (koordinátákat) használunk (vagy akár komplex számokat). A megoldás lényege abban áll, hogy az eredeti szerkesztés alapján kifejezzük az A, B és C koordinátáinak függvényében az M, N és P koordinátáit, majd a kapott összefüggésekből kifejezzük az eredeti csúcsok koordinátáit az M, N, P koordinátái függvényében (ez egy egyenletrendszer megoldása), és végül a kapott összefüggések alapján megszerkesztjük a pontokat.

6. feladat: Színezzük ki egy szabályos 2010-szög csúcsait 3 színnel, mindhárom színt ugyanannyiszor használva. Igaz-e, hogy bármely színezés esetén lesz olyan szabályos háromszög, amelynek vagy minden csúcsa azonos színű, vagy a három csúcsa három különböző színű?

Fejér Szabolcs (Miskolc)

6. feladat I. megoldása: Az állítás nem igaz, ugyanis van olyan színezés, mely esetén minden szabályos háromszög csúcsai kétféle színűek. Egy ilyen színezést megkaphatunk, ha számozzuk a csúcsokat 1-től 2010-ig (az óramutató járásával ellentétes sorrendben), majd az $1, 2, \ldots, 670$ sorszámú csúcsokat az egyik színnel (pl. pirossal) színezzük, a következő 335 csúcsot a második színnel (pl. kékkel), a következő 335 csúcsot a harmadik színnel (pl. sárgával), a következő 335 csúcsot ismét a második színnel (kékkel) és végül az utolsó 335 csúcsot a harmadik színnel (sárgával). A szabályos háromszögek csúcsainak sorszáma mindig $i, i+670, i+1340$ alakú, ahol $i \leq 670$, tehát az egyik csúcs mindig piros és a másik kettő mindig azonos színű, mivel $i + 1340 = i + 670 + 2 \cdot 335$.

6. feladat II. megoldása: Jelöljük a színeket p, k és s-sel. összesen 670 egyenlő oldalú háromszög van, amelynek a csúcsai a sokszög csúcsai közül kerülnek ki. Ha ezek között nincs olyan, amelynek azonos színűek a csúcsai, vagy mind különbözőek, akkor a csúcsok színezése szerint a 670 háromszög a következő hat osztályba sorolható:

$$\{p,k,k\},\ \{p,s,s\},\ \{s,p,p\},\ \{k,p,p\},\ \{k,s,s\} \text{ és } \{s,k,k\}$$

(a $\{p,k,k\}$ azt jelenti, hogy két csúcs k színű és egy csúcs p színű stb.). Ha ezeknek az osztályoknak a számosságát rendre a, b, c, d, e és f jelöli, akkor a színek összeszámlálása és a feltétel alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{cases} a + b + 2c + 2d = 670 \\ d + e + 2f + 2a = 670 \\ c + f + 2b + 2e = 670 \end{cases} \tag{1}$$

Ha ebből az egyenletrendszerből kifejezzük az a-t, a b-t és a d-t a többi változó függvényében, akkor az

$$\begin{cases} a = 335 - e - \frac{3}{2}f + \frac{c}{2} \\ b = 335 - e - \frac{c}{2} - \frac{f}{2} \\ d = -c + e + f \end{cases} \tag{2}$$

egyenlőségekhez jutunk. Ez mutatja, hogy több olyan színezés is van, amelyben nincs sem egyszínű szabályos háromszög, sem olyan, amelynek a csúcsai mind különböző színűek. Például $c = f = 0$ és $e < 335$ esetén $a = 335 - e$, $b = 335 - e$ és $d = e$ egy ilyen színezést ír le. Világos, hogy a csúcsok színezését elvégezhetjük úgy, hogy kiválasztjuk a 670 egyenlő oldalú háromszögből (tetszőlegesen) azt az a darabot, amelyet az első osztálynak megfelelően színezünk, aztán a maradékból azt a b darabot, amelyet a második osztálynak megfelelően színezünk és a többit a negyedik osztálynak megfelelően színezzük.

Megjegyzés: A második megoldás rávilágít arra, hogy nagyon sok olyan színezés létezik, amelyben nincs sem egyszínű szabályos háromszög, sem olyan, amelynek a csúcsai mind különböző színűek, és ugyanakkor megmutatja az összes ilyen színezés szerkezetét is.