XVIII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Gyula, 2009. március 12-16.

12. osztály

1. feladat: Igazoljuk, hogy tetszőleges x valós számra teljesülnek a következő egyenlőtlenségek!

$$-\frac{5}{4} \leq \sin x + \cos x + \sin 2x \leq 1 + \sqrt{2}.$$

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

2. feladat: 2009 számjegyei három „köz”-t határoznak meg: 2_0_0_9. A számon a következő átalakítást végezzük: kiválasztunk egy tetszőleges 10-es számrendszerbeli számjegyet, az első közbe beírjuk, a második közbe kétszer írjuk be, a harmadik közbe háromszor. Így egy következő számhoz jutunk. Ez persze hosszabb és így számjegyei több közt határoznak meg. Újból elvégezzük a fenti átalakítást: újból választunk egy számjegyet és a közökbe ezt írjuk (az i-edik közbe i darabot). Ezt az eljárást folytatjuk. Igazoljuk, hogy eljárásunk során soha sem kaphatunk 3-mal osztható számot.

Bíró Bálint (Eger)

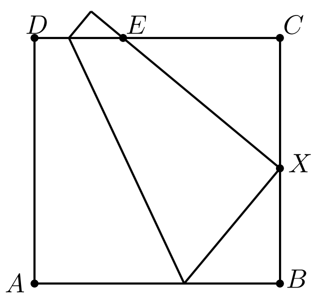
3. feladat: Jelölje AC és BD az egység sugarú kör két merőleges átmérőjét.Az AB, BC, CD és DA negyedköríveken felvesszük a P, Q, R és T pontokat úgy, hogy $APBQCRDT$ egy konvex nyolcszög lesz. Hogyan válasszuk meg a P, Q, R, T pontokat ahhoz, hogy a kialakított nyolcszög oldalainak négyzetösszege minimális legyen.

Bíró Bálint (Eger)

4. feladat: Az $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{101}, a_{102}$ az $1, 2, 3, 4, \ldots, 101, 102$ számok egy tetszőleges sorbaállítása. Igazoljuk, hogy az $a_1 + 1, a_2 + 2, a_3 + 3, a_4 + 4, \ldots, a_{101} + 101, a_{102} + 102$ számok közt lesz két olyan, amelyek 102-vel osztva azonos maradékot adnak!

Balázsi Borbála (Beregszász)

5. feladat: Egy $ABCD$ négyzet alakú papír A csúcsát a BC oldal egy X belső pontjához mozgatjuk és a papírlapot behajtjuk. A behajtott AD oldal az ábrán látható módon a C csúcsnál levág egy XEC háromszöget. Hogyan válasszuk meg az X pontot ahhoz, hogy a levágott háromszög beírt körének sugara a lehető legnagyobb legyen?



Egyed László (Baja)

6. feladat: Egy n elemű halmaz három elemű részhalmazaiból kiválasztunk néhányat úgy, hogy semelyik három ne tartalmazzon egynél több közös elemet. Igazoljuk, hogy a kiválasztott hármasok száma nem haladhatja meg $\frac{n(n-1)}{3}$-at!

Róka Sándor (Nyíregyháza)