XVIII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Gyula, 2009. március 12–16.

12. osztály

1. feladat: Igazoljuk, hogy tetszőleges x valós számra teljesülnek a következő egyenlőtlenségek!

$$-\frac{5}{4} \le \sin x + \cos x + \sin 2x \le 1 + \sqrt{2}.$$

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

Megoldás: Legyen $T = \sin x + \cos x + \sin 2x$. Ekkor

$$T = \sin x + \cos x + \sin 2x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) + \sin 2x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x.$$

Ebből az alakból nyilvánvaló, hogy $T \le \sqrt{2} + 1$.

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \\ &= \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \cos 2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 1 = \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)^2 - \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Ebből az alakból nyilvánvaló, hogy $T \ge -5/4$.

Megjegyzés: Az alsó becslést a $T = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x + \cos x) - 1$ alakból is kihozhatjuk, ugyanis $\sin x + \cos x = a$ jelöléssel $T = a^2 + a - 1$, ami $T = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$ alakra hozható.

---

2. feladat: 2009 számjegyei három „köz"-t határoznak meg: 2_0_0_9. A számon a következő átalakítást végezzük: kiválasztunk egy tetszőleges 10-es számrendszerbeli számjegyet, az első közbe beírjuk, a második közbe kétszer írjuk be, a harmadik közbe háromszor. Így egy következő számhoz jutunk. Ez persze hosszabb és így számjegyei több közt határoznak meg. Újból elvégezzük a fenti átalakítást: újból választunk egy számjegyet és a közökbe ezt írjuk (az i-edik közbe i darabot). Ezt az eljárást folytatjuk. Igazoljuk, hogy eljárásunk során soha sem kaphatunk 3-mal osztható számot.

Bíró Bálint (Eger)

Megoldás: Ha egy $3l + 1$ jegyű számon végezzük el az átalakítást, akkor $3l$ közbe írunk számjegyeket, összesen $1 + 2 + 3 + \ldots + 3l$ darabot. A beírt számjegyek száma 3-mal osztható, hiszen az ezt a számot megadó összeg l darab három tagú összeg összege $((1 + 2 + 3) + (4 + 5 + 6) + \ldots + (3l - 2 + 3l - 1 + 3l))$, amelyben minden tag három szomszédos egész összege, azaz hárommal osztható. (Természetesen a beírt számjegyek száma a számtani sorozat összegzési képlete alapján $(3l+1)3l/2$, amiből szintén könnyen látható a hárommal való oszthatóság.) Így az új szám számjegyeinek száma is 1 maradékot ad hárommal osztva. Sőt, ha a számjegyek összegét nézzük, akkor az új szám a régi számjegyeinek összegéhez képest hárommal osztható számmal növekszik (az új számjegyek ugyanazok). Így az új szám ugyanazt adja maradékul hárommal osztva, mint amiből képeztük.

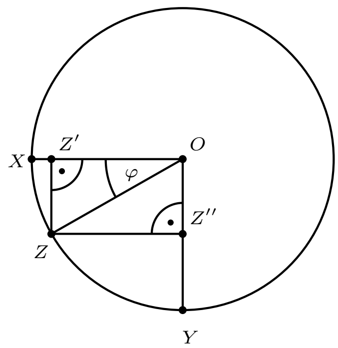
A kiinduló szám négyjegyű ($4 = 3 \cdot 1 + 1$). Így a számjegyek száma végig $3l + 1$ alakú szám lesz. A kiinduló szám $3s + 2$ alakú. Így az átalakítások során végig olyan számot kapunk, ami hárommal osztva 2-t ad maradékul.

---

3. feladat: Jelölje AC és BD az egység sugarú kör két merőleges átmérőjét.Az AB, BC, CD és DA negyedköríveken felvesszük a P, Q, R és T pontokat úgy, hogy $APBQCRDT$ egy konvex nyolcszög lesz. Hogyan válasszuk meg a P, Q, R, T pontokat ahhoz, hogy a kialakított nyolcszög oldalainak négyzetösszege minimális legyen.

Bíró Bálint (Eger)

I. megoldás:



Elég k egy (X és Y pontok által közrefogott) negyedkör ívében megkeresni azokat a Z pontokat, amelyek az $XZ^2 + ZY^2$ kifejezést minimalizálják. Ezen feladat megoldását az AB, BC, CD és DA negyedkörívekre alkalmazva meg tudjuk válaszolni a feladat kérdését is. Jelöljük φ-vel a $ZOX\sphericalangle$-et. Legyen Z vetülete OX-re Z', OY-ra Z''. Ekkor $Z'O = ZZ'' = \cos\varphi$ és $Z''O = ZZ' = \sin\varphi$. Így adódik, hogy $XZ' = 1 - \cos\varphi$ és $YZ'' = 1 - \sin\varphi$. Az $XZ^2 + ZY^2$ négyzet összeg két Pitagorasz-tétel összegeként adódik:

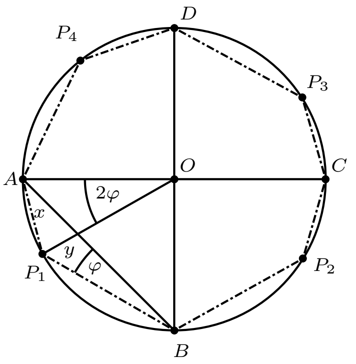
$$\begin{aligned}(1-\cos\varphi)^2 \quad &+ \quad \sin^2\varphi + \cos^2\varphi + (1-\sin\varphi)^2 = \\ &= \quad 1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi + \cos^2\varphi + 1 - 2\sin\varphi + \sin^2\varphi = \\ &= \quad 4 - 2(\sin\varphi + \cos\varphi).\end{aligned}$$

Feladatunk $\sin\varphi + \cos\varphi$ maximalizálása, ahol $\varphi \in (0; \pi/2)$. Ez a kifejezés akkor lesz maximális, ha négyzete maximális, ami $\sin^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi = 1 + \sin 2\varphi$. Ez akkor lesz maximális, ha $\sin 2\varphi = 1$, azaz $\varphi = \pi/4$, azaz Z az XY ív felezőpontja.

A negyedkörre vonatkozó optimalizálási kérdésre adott válaszból következik, hogy a négy ismeretlen csúcs választása akkor lesz optimális, ha szabályos nyolcszöget alakítanak ki (mindegyikük a megfelelő negyedkörív felezőpontja).

Megjegyzés: Hasonlóan járhatunk el úgy is, hogy az OXZ és az OYZ háromszögekben alkalmazzuk a koszinusz tételt (a megfelelő szögek φ, ill. $90° - \varphi$). Ekkor szintén azonnal adódik, hogy a $\sin\varphi + \cos\varphi$ mennyiség maximumát kell meghatározni, ha $\varphi \in (0; \pi/2)$.

II. megoldás: Jelöléseink az ábrán láthatók. (Itt az egyes negyedkörökön felvett pontokat P_1, P_2, P_3 és P_4 jelöli.)



Mivel $OA = OC = R = 1$, ezért a Pitagorasz-tétel miatt $AC = \sqrt{2}$. A P_1-et nem tartalmazó AC ívhez 270°-os középponti szög tartozik, a kerületi és középponti szögek összefüggése miatt ezért $AP_1C\sphericalangle = 135°$. Ugyancsak a kerületi és középponti szögek összefüggéséből adódik, hogy ha $P_1CA\sphericalangle = \varphi$, akkor $P_1OA\sphericalangle = 2\varphi$, ahogy azt az ábrán is jelöltük.

Felírhatjuk az AP_1C háromszögre a koszinusztételt:

$$x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 135° = AC^2. \tag{1}$$

Tudjuk, hogy $AC = \sqrt{2}$ és $\cos 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ezért (1)-ből következik, hogy

$$x^2 + y^2 + \sqrt{2} \cdot xy = 2. \tag{2}$$

A (2) összefüggésből látható, hogy az x^2 és y^2 számok mindegyike kisebb 2-nél, erre az eredményre a megoldás során később lesz szükségünk. Az OAP_1 háromszögre felírt koszinusztétel miatt $x^2 = 2 - 2 \cdot \cos 2\varphi$, amelyből

$$\cos 2\varphi = \frac{2 - x^2}{2}. \tag{3}$$

Egy trigonometriai azonosság szerint $\cos 2\varphi = 2 \cdot \cos^2 \varphi - 1$, azaz (3)-ból a műveletek elvégzése után

$$\cos^2 \varphi = \frac{4 - x^2}{4}. \tag{4}$$

Az AP_1C háromszögre ismét felírjuk a koszinusztételt, de most másik oldalra. Eszerint $x^2 = y^2 + 2 - 2 \cdot y \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \varphi$, ebből $\cos \varphi = \frac{2 + y^2 - x^2}{2y \cdot \sqrt{2}}$, ebből pedig négyzetre emeléssel, egyszerűsítés után:

$$\cos^2 \varphi = \frac{x^4 + y^4 - 4x^2 + 4y^2 - 2x^2y^2 + 4}{8y^2}. \tag{5}$$

A (4) és (5) egyenlőségéből $\frac{4-x^2}{4}=\frac{x^4+y^4-4x^2+4y^2-2x^2y^2+4}{8y^2}$, illetve a műveletek elvégzése és rendezés után $(2-x^2)^2+(2-y^2)^2=4$, amelyből

$$\sqrt{\frac{(2-x^2)^2+(2-y^2)^2}{2}}=\sqrt{2} \tag{6}$$

következik.

Mivel a fentiek szerint az x^2 és y^2 számok mindegyike kisebb 2-nél, ezért a (6) összefüggés bal oldalán éppen a $2-x^2$ és $2-y^2$ pozitív számok négyzetes közepe áll. Erről tudjuk, hogy nagyobb, vagy egyenlő a kérdéses számok számtani közepénél, vagyis $\sqrt{2}\geq\frac{4-(x^2+y^2)}{2}$, amelyből

$$x^2+y^2\geq 4-2\cdot\sqrt{2}. \tag{7}$$

A (7) eredmény azt jelenti, hogy az $AP_1CP_2BP_3DP_4$ nyolcszög P_1A és P_1C oldalai négyzetösszegének minimális értéke $4-2\cdot\sqrt{2}$, ezt a minimumot a $P_1A^2+P_1C^2$ összeg akkor éri el, ha a négyzetes és a számtani közép tagjai egyenlők, azaz, ha $2-x^2=2-y^2$, vagyis, ha $PA_1=x=y=PC_1$.

Ekkor P_1 éppen az AC negyedkörív felezőpontja.

Hasonlóképpen látható be, hogy a $P_2C^2+P_2B^2$, $P_3B^2+P_3D^2$ és $P_4D^2+P_4A^2$ összegek mindegyikének minimális értéke is $4-2\cdot\sqrt{2}$, ez pedig azt jelenti, hogy az $AP_1CP_2BP_3DP_4$ nyolcszög oldalai négyzetösszegének minimális értéke $16-8\cdot\sqrt{2}$, ez akkor valósul meg, ha a P_1; P_2; P_3 és P_4 pontok a megfelelő negyedkörívek felezőpontjai.

---

4. feladat: Az $a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots,a_{101},a_{102}$ az $1,2,3,4,\ldots,101,102$ számok egy tetszőleges sorbaállítása. Igazoljuk, hogy az $a_1+1,a_2+2,a_3+3,a_4+4,\ldots,a_{101}+101,a_{102}+102$ számok közt lesz két olyan, amelyek 102-vel osztva azonos maradékot adnak!

Balázsi Borbála (Beregszász)

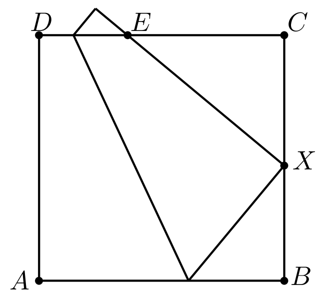
Megoldás: Tegyük fel, hogy $a_1,a_2,\ldots,a_{102}$ ellenpélda az állításra. 102-vel osztva egy egész számot 102-féle maradékot kaphatunk. Ha a 102 darab a_i+i számunk közt nincs kettő ugyanazzal a maradékkal, akkor az csak úgy lehet, hogy mindegyik maradék pontosan egyszer fordul elő. Tehát az a_i+i számaink összege ugyanazt adja maradékul 102-vel osztva, mint $0+1+2+3+\ldots+101=51\cdot 101$. Számaink összege

$$\begin{aligned}(a_1+1)+(a_2+2)+\ldots+(a_{102}+102) &= (a_1+a_2+\ldots+a_{102})+(1+2+\ldots+102)=\\ &= 2(1+2+\ldots+102)=102\cdot 103,\end{aligned}$$

hiszen az a_i-k is 1-től 102-ig az egészek, csak esetleg más sorrendben. Tehát számaink összege osztható 102-vel, míg $0+1+2+\ldots+101$ nem. Ez ellentmondás, ami az állítást igazolja.

---

5. feladat: Egy $ABCD$ négyzet alakú papír A csúcsát a BC oldal egy X belső pontjához mozgatjuk és a papírlapot behajtjuk. A behajtott AD oldal az ábrán látható módon a C csúcsnál levág egy XEC háromszöget. Hogyan válasszuk meg az X pontot ahhoz, hogy a levágott háromszög beírt körének sugara a lehető legnagyobb legyen?



Egyed László (Baja)

Megoldás: Az A csúcs az X pontba kerül. A hajtás egyenese az AX szakasz felező merőlegese. Erről könnyű látni, hogy az AB és DC oldalakat metszi. A metszéspontok legyenek rendre M és N. Legyen $XAB\sphericalangle = \alpha$.

Az AMX háromszög egyenlőszárú, alapon fekvő szögei α nagyságúak. Az $XMB\sphericalangle$ a háromszög egyik külső szöge, nagysága 2α. Az $EXC\sphericalangle$ és az $XMB\sphericalangle$ merőleges szárú szögek, így $EXC\sphericalangle = XMB\sphericalangle = 2\alpha$. Legyen O az EXC háromszög beírt körének középpontja. A CX oldal a beírt kört érintse az O' pontban. Ekkor az XOO' háromszög egy derékszögű háromszög és X-nél lévő szöge $EXC\sphericalangle/2 = \alpha$. Így hasonló az ABX háromszöghöz.

Legyen 1 a kiinduló négyzet oldala és az XB hosszát jelöljük x-szel. Így az ABX háromszög két befogója 1 és x. Ha az EXC háromszög beírt körének sugara r, akkor az OXO' háromszög befogói $1-x-r$ és r. A hasonlóság miatt $x : 1 = r : 1-x-r$. Ebből r kifejezhető:

$$r = \frac{x-x^2}{1+x} = \frac{(2+x+-x^2)-2}{1+x} = 2-x-\frac{2}{1+x} = 3-\left(1+x+\frac{2}{1+x}\right).$$

Ez a sugár akkor lesz a legnagyobb, amikor a 3-ból levont kifejezés a legkisebb. Ez a kifejezés egy összeg, amely tagjainak szorzata állandó. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből és abban az egyenlőség esetének analíziséből következik, hogy a levont kifejezés pontosan akkor a legkisebb, amikor $1+x = \frac{2}{1+x}$, azaz $1+x = \sqrt{2}$, $x = -1+\sqrt{2}$.

---

6. feladat: Egy n elemű halmaz három elemű részhalmazaiból kiválasztunk néhányat úgy, hogy semelyik három ne tartalmazzon egynél több közös elemet. Igazoljuk, hogy a kiválasztott hármasok száma nem haladhatja meg $\dfrac{n(n-1)}{3}$-at!

Róka Sándor (Nyíregyháza)

Megoldás: Alaphalmazunk összes kételemű részhalmazára írjuk fel a kiválasztott elemhármasok közül azokat, amelyek a két elemű halmazt tartalmazzák. Feltételeink szerint egy kételemű halmaz esetén se írhattunk fel három vagy több kiválasztott elem-hármast, azaz az $\binom{n}{2}$ elempár mindegyike legfeljebb 2 elem-hármast ad a listára. Így listánk legfeljebb $\binom{n}{2}\cdot 2$ hosszú lesz.

Másrészt minden kiválasztott három-elemű részhalmaz háromszor szerepel a listán, a három két elemű részhalmaza miatt. A kétféle gondolatmenet összevetéséből kapjuk, hogy a kiválasztott részhalmazok száma legfeljebb

$$\frac{\binom{n}{2}\cdot 2}{3} = \frac{n(n-1)}{3}.$$