XVIII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Gyula, 2009. március 12–16.

11. osztály

1. feladat: Állítsuk öt párba az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ számokat úgy, hogy a párokban lévő számok különbségeinek abszolút értékei rendre $1, 2, 3, 4, 5$-t adjanak! Megtehető-e ez a párosítás (természetesen hat párba), ha az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ számokkal dolgozunk, úgy hogy ezek a különbségek $1, 2, 3, 4, 5, 6$ legyenek? Indokoljuk a választ!

Hajnal Péter (Szeged)

Megoldás: Az **első esetben a kért párosítás lehetséges.** Íme egy megoldás:

$$(2-1); (9-7); (6-3); (8-4); (10-5)$$

A második esetben úgy kell kialakítanunk a párokat, hogy a párokban szereplő számok különbségeinek abszolút értékei rendre $1, 2, 3, 4, 5, 6$ legyenek.

Legyen x_k a k-dik párban szereplő két szám közül a kisebb, így a másik szám $x_k + k$ lesz, ahol $k \in 1; 2; 3; 4; 5; 6$- A kapott párokban szereplő számokat összeadva

$$(2x_1 + 1), (2x_2 + 2), (2x_3 + 3), (2x_4 + 4), (2x_5 + 5), (2x_6 + 6)$$

számokat kapunk, melyeknek összege éppen $1 + 2 + 3 + ... + 12$ kell legyen. Ha X-szel jelöljük a $\sum\limits_{k=1}^{6} x_k$ összeget, akkor

$$\sum_{k=1}^{6}(2x_k + k) = 2\sum_{k=1}^{6} x_k + \sum_{k=1}^{6} k = 2X + \frac{6 \cdot 7}{2},$$

innen

$$2X + \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{12 \cdot 13}{2} \Rightarrow 2X + 21 = 78 \Rightarrow 2X = 57.$$

A kapott egyenletnek nincs megoldása a természetes számok halmazán, tehát a **második esetben a kért párosítás nem lehetséges.**

---

2. feladat: Létezik-e két olyan egymástól különböző, pozitív racionális szám, amelyeknek számtani, mértani és harmonikus közepe egy derékszögű háromszög oldalhosszai?

Olosz Ferenc (Szatmárnémeti)

Megoldás: Legyen $a, b \in \mathbb{Q}$ úgy, hogy $a > b > 0$. Az $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$ egyenlőtlenségek alapján az átfogó hossza csak $\frac{a+b}{2}$ lehet.

Felírjuk a Pitagorasz-tételt $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{ab}\right)^2 + \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2$, majd közös nevezőre hozás után, egyenértékű átalakításokkal rendre kapjuk, hogy

$$(a+b)^4 = 4ab(a+b)^2 + 16a^2b^2$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2[(a+b)^2-4ab] &= 16a^2b^2\\
(a+b)^2(a-b)^2 &= 16a^2b^2\\
(a^2-b^2)^2 &= 16a^2b^2
\end{aligned}
$$

ahonnan következik, hogy $a^2 - b^2 = 4ab$ (mivel $a > b$). Átrendezve az $a^2 - 4ab - b^2 = 0$ egyenlethez jutunk, melyet végigosztunk b^2-tel (mert $b \neq 0$). Az $(\frac{a}{b})^2 - 4(\frac{a}{b}) - 1 = 0$ egyenletet megoldva kapjuk, hogy $\frac{a}{b} = 2 \pm \sqrt{5}$

Az $a > b > 0$ feltétel alapján csak az $\frac{a}{b} = 2 + \sqrt{5}$ lehetséges.

Az $\frac{a}{b} - 2 = \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ ellentmond annak a feltételnek, hogy $a, b \in Q$, azaz $\frac{a}{b} - 2 \in \mathbb{Q}$.

Tehát nem létezik a feltételeknek megfelelő két különböző pozitív racionális szám.

---

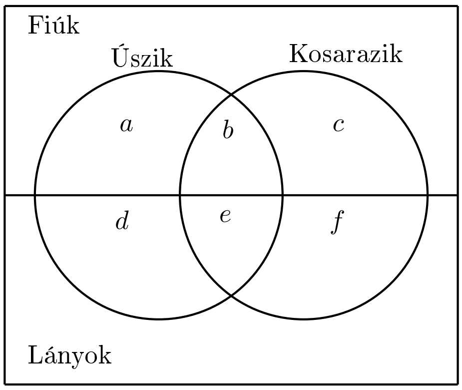
3. feladat: Egy osztály minden tanulója vagy úszik, vagy kosarazik, esetleg mindkettőt csinálja. Lehetséges-e, hogy az osztályban több a lány, mint a fiú a következő esetekben:

a) ha az úszóknak és a kosarasoknak is 60%-a fiú?

b) ha az úszók 60%-a és a kosarasok 75%-a fiú ?

Katz Sándor (Bonyhád)

Megoldás: Az a kérdés, hogy lehetséges-e, hogy $d + e + f > a + b + c$.



a)

$a + b = 0,6(a + b + d + e)$ és $c + b = 0,6(c + b + f + e)$

$0,4a + 0,4b = 0,6d + 0,6e$ és $0,4e + 0,4b = 0,6f + 0,6e$.

$d + e = \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b$ (1) és $f + e = \frac{2}{3}c + \frac{2}{3}b$ (2)

Az (1) és (2) alapján: $d + 2e + f = \frac{2}{3}a + \frac{4}{3}b + \frac{2}{3}c$.

Innen

$$d + e + f = \frac{2}{3}a + \frac{4}{3}b + \frac{2}{3}c - e = a + b + c - \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c - e$$

$$(d + e + f) - (a + b + c) = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c - e$$

A kért egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $-\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c - e > 0$, azaz $b > a + c - 3e$.

Tehát úgy lehet a teljes létszám nagyobb része lány, hogy a fiúk (mindegyike vagy nagy része) mindkét sportot űzik, a lányok meg csak az egyiket.

Ha pl. $a = c = e = 0$, akkor $2b = 3d = 3f$. Így, hogy „osztálynyian" legyenek $b = 15$ és $d = f = 10$.

(De nem szükséges, hogy $a = c = e = 0$ legyen, pl. $a = c = 2$, $e = 1$, $b = 10$ és $d = f = 7$ esetén még mindig több a lány (15), mint a fiú (14) az osztályban.)
Összefoglalva, tehát ennél az aránynál **lehetséges**, hogy több a lány, mint a fiú.

b)
$a + b = 0,6(a + b + d + e)$ és $c + b = 0,75(c + b + f + e)$
$0,4a + 0,4b = 0,6d + 0,6e$ és $0,25c + 0,25b = 0,75f + 0,75e$.
$d + e = \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b$ (3) és $f + e = \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}b$ (4)
A (3) és (4) alapján: $d + 2e + f = \frac{2}{3}a + b + \frac{1}{3}c$.
Innen

$$d + e + f = \frac{2}{3}a + b + \frac{1}{3}c - e = a + b + c - \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}c - e$$

$$(d + e + f) - (a + b + c) = -\frac{1}{3}a - \frac{2}{3}c - e$$

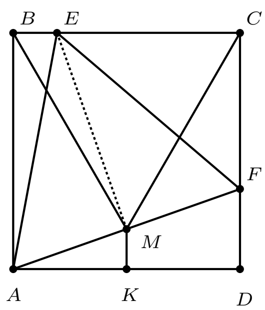
A kért egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $-\frac{1}{3}a + -\frac{2}{3}c - e > 0$, ami nyilván nem lehetséges.
Összefoglalva, tehát ennél az aránynál már **nem lehetséges**, hogy több a lány, mint a fiú.

---

4. feladat: Legyen $ABCD$ egy olyan téglalap, amelybe szabályos háromszög írható úgy, hogy a háromszög egyik csúcsa az A pont, a másik kettő pedig a téglalap egy-egy olyan oldalán fekszik, amelyen az A pont nincs rajta. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a téglalapból a szabályos háromszög által lemetszett háromszögek egyikének a területe a két másik lemetszett háromszög területének összegével egyenlő!

Pintér Ferenc (Nagykanizsa)

I. megoldás: Legyen $AB = a$ és $BC = b$, az M pont pedig az AFE szabályos háromszög AF oldalának felezőpontja.



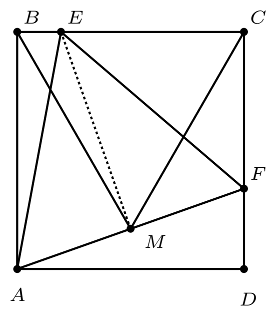
Mivel $ABE\sphericalangle = 90° = AME\sphericalangle$, ezért a B és M pontok rajta vannak az AE szakasz Thalész-körén. De $MAE\sphericalangle = 60°$, ezért a kerületi szögek tétele miatt az $EBM\sphericalangle = 60°$. Mivel $ECF\sphericalangle = 90° = FME\sphericalangle$, ezért a C és M pontok rajta vannak az FE szakasz Thalész-körén. De $MFE\sphericalangle = 60°$, ezért a kerületi szögek tétele miatt az $ECM\sphericalangle = 60°$. Az $EBM\sphericalangle = 60° = ECM\sphericalangle$, tehát a BMC háromszög szabályos.

Ez azt jelenti, hogy M pont a BC oldaltól $\frac{b\sqrt{3}}{2}$, míg az AD oldaltól $a - \frac{b\sqrt{3}}{2}$ távolságra van. Az AFD háromszögben MK középvonal, így $DF = 2\left(a - \frac{b\sqrt{3}}{2}\right) = 2a - b\sqrt{3}$.

Hasonló gondolatmenettel vagy az ABE és az AFD háromszögekben felírt Pitagorasz-tétel segítségével belátható, hogy $BE = 2b - a\sqrt{3}$. Következésképpen:

$T_{ABE\Delta} = \frac{1}{2}a\left(2b - a\sqrt{3}\right) = ab - \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$
$T_{ADF\Delta} = \frac{1}{2}b\left(2a - b\sqrt{3}\right) = ab - \frac{b^2\sqrt{3}}{2}$
$T_{ECF\Delta} = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{3} - b\right)\left(b\sqrt{3} - a\right) = 2ab - \frac{a^2\sqrt{3}}{2} - \frac{b^2\sqrt{3}}{2} = T_{ABE\Delta} + T_{ADF\Delta}$,
amit igazolni kellett.

II. megoldás: Legyen $BAE\sphericalangle = \alpha$. Felhasználva, hogy az AFE szabályos háromszög ($AE = EF = AF = x$) következik, hogy $FAD\sphericalangle = 30° - \alpha$, illetve $CEF\sphericalangle = 30° + \alpha$.



Az ABE derékszögű háromszögben $AB = x\cos(\alpha)$ és $BE = x\sin(\alpha)$, tehát $T_{ABE\Delta} = \frac{1}{2}x^2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{1}{4}x^2\sin(2\alpha)$ (ahol felhasználtuk, hogy $\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{2}$).

Az ADF derékszögű háromszögben $AD = x\cos(30° - \alpha)$ és $FD = x\sin(30° - \alpha)$, tehát $T_{ADF\Delta} = \frac{1}{2}x^2\sin(30° - \alpha)\cos(30° - \alpha) = \frac{1}{4}x^2\sin(60° - 2\alpha)$.

Az ECF derékszögű háromszögben $CE = x\cos(30° + \alpha)$ és $FC = x\sin(30° + \alpha)$, tehát $T_{ECF\Delta} = \frac{1}{2}x^2\sin(30° + \alpha)\cos(30° + \alpha) = \frac{1}{4}x^2\sin(60° + 2\alpha)$.

Felhasználva, hogy $\sin(p + q) - \sin(p - q) = 2\cos(p)\sin(q)$, következik, hogy

$$T_{ECF\Delta} - T_{ADF\Delta} = \frac{1}{4}x^2\sin(60°+2\alpha) - \frac{1}{4}x^2\sin(60°-2\alpha) = \frac{1}{4}x^2\left[\sin(60° + 2\alpha) - \sin(60° - 2\alpha)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 2\cos(60°)\sin(2\alpha) = \frac{1}{4}x^2 2\frac{1}{2}\sin(2\alpha) = \frac{1}{4}x^2\sin(2\alpha) = T_{ABE\Delta},$$

azaz $T_{ECF\Delta} = T_{ABE\Delta} + T_{ADF\Delta}$, amit igazolni kellett.

---

5. feladat: Bizonyítsuk be, hogy a $3^k + 3^n$ alakban felírt négyzetszámokból végtelen sok van, ahol k és n különböző pozitív egész számok! Mi a helyzet, ha a 3 helyett a 4, az 5, a 6 és a 7 számokat írjuk?

Kántor Sándor (Debrecen)

Megoldás: Azt kell megvizsgálnunk, hogy az $a^m + a^k$ (ahol $m \neq k$ és $a, m, k \in \mathbb{N}^+$) alakú számok a kért esetekben mikor lesznek négyzetszámok. Ha ugyanis egy $a^m + a^k$ alakú szám négyzetszám, akkor végtelen sok ilyen alakú négyzetszám van, mert minden n pozitív egész szám esetén $a^{m+2n} + a^{k+2n} = a^m \cdot a^{2n} + a^k \cdot a^{2n} = a^{2n}\left(a^m + a^k\right) = \left(a^n\right)^2\left(a^m + a^k\right)$.

Az $a = 3$ eset.
Mivel $3^3 + 3^2 = 27 + 9 = 36 = 6^2$, ezért végtelen sok $3^m + 3^k$ alakú négyzetszám van.

Az $a = 4$ eset.

Az általánosság leszűkítése nélkül feltételezhetjük, hogy $m > k$.

Ekkor $4^m + 4^k = 4^k\left(4^{m-k}+1\right) = \left(2^k\right)^2\left(4^{m-k}+1\right)$, azaz azt kell megvizsgálnunk, mikor lesz a $4^{m-k}+1$ teljes négyzet. Ha $4^{m-k}+1 = c^2$, akkor $c^2 - 4^{m-k} = c^2 - \left(2^{m-k}\right)^2 = \left(c - 2^{m-k}\right)\left(c + 2^{m-k}\right) = 1$.

Felhasználva, hogy a c és a 2^{m-k} egész számok, innen a $2^{m-k} = 0$ következne, ami nem lehetséges. Tehát a 4 két különböző pozitív egész kitevős hatványának összege nem lehet négyzetszám.

Az $a = 5$ eset.

Az 5^n szám minden $n > 1$ esetben 25-re végződik, míg $5^1 = 5$. Ezek alapján az $5^m + 5^k$ szám vagy 30-ra vagy 50-re végződik. Viszont ha egy négyzetszám 10-el osztható, akkor 100-al is osztható, így nem végződhet sem 30-ra, sem 50-re. Tehát az 5 két különböző pozitív egész kitevős hatványának összege nem lehet négyzetszám.

Az $a = 6$ eset.

A 6-nak bármely pozitív egész hatványa 6-ra végződik. Így a $6^m + 6^k$ szám utolsó számjegye 2 lesz, de négyzetszám 2-re nem végződhet. Tehát a 6 két különböző pozitív egész kitevős hatványának összege nem lehet négyzetszám.

Az $a = 7$ eset.

A 7-nek 3-al való osztási maradéka 1, ezért a 7 minden pozitív egész kitevős hatványának a 3-mal való osztási maradéka szintén 1 (hiszen a $7^n = (2 \cdot 3 + 1)^n = 3M + 1$ alakú lesz). Így a $7^m + 7^k$ szám 3-al osztva 2-t ad maradékul.

Ha c egy természetes szám és 3-nak többszöröse, akkor c^2 is 3 többszöröse lesz, míg ha $c = 3n \pm 1$ alakú, akkor a négyzetének 3-al való osztási maradéka 1 lesz. Összegezve, egy négyzetszám hárommal osztva csak 0 vagy 1 maradékot adhat.

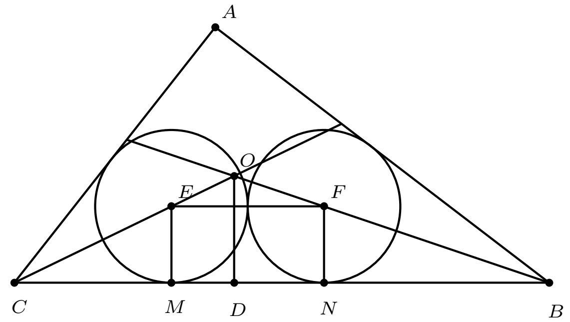
Tehát a 7 két különböző pozitív egész kitevős hatványának összege nem lehet négyzetszám.

---

6. feladat: Adott háromszögbe szerkesztettünk két egybevágó, közös belső pont nélküli, maximális sugarú kört. Mekkora ez a sugár? Hogyan történhet a szerkesztés?

Bogdán Zoltán (Cegléd)

Megoldás: Legyen ABC az adott háromszög, melynek oldalai a, b, c. Nyilván mindkét kör érinti például az a oldalt és az egyik a b-t, a másik a c-t, valamint egymást is érintik. Az egyik kör középpontja a B csúcsból, a másiké a C csúcsból kiinduló belső szögfelezőn lesz. A körök középpontjai legyenek E és F, míg a szögfelezők metszéspontja (a háromszögbe írható kör középpontja) pedig O.



Legyen a háromszögbe írható kör sugara r, a keresett sugár pedig x. Ekkor az $EM = FN = x$, illetve az $EMN\sphericalangle = FNM\sphericalangle = 90^\circ$ összefüggések alapján következik, hogy az $EFNM$ négyszög egy téglalap. Mivel $EF \parallel BC$, könnyen belátható a BCO és FEO háromszögek hasonlósága. Figyelembe véve, hogy $OD = r$, a két háromszög hasonlóságából felírható, hogy $\frac{r-x}{r} = \frac{2x}{a}$, ahonnan az $x = \frac{ar}{a+2r}$ lesz.

Ha x kifejezésében a-val egyszerűsítünk, azaz $x = \frac{r}{1+\frac{2r}{a}}$ lesz, akkor az látszik, hogy a nevező akkor a legkisebb, ha a mindkét kört érintő a oldal a három oldal közül a legnagyobb. Ekkor lesz az x sugár az adott háromszögben maximális.

Az x egy lehetséges megszerkesztése:

- adott a, b, c hosszúságú szakaszokkal megszerkesztjük az ABC háromszöget
- megszerkesztjük a háromszög két belső szögfelezőjét, így azok metszéspontjából megkapjuk a háromszögbe írható kör középpontját, illetve sugarát
- egy szög egyik szárára felmérjük az $a + 2r$ és az a hosszúságú szakaszokat, a másik szárára pedig egy r hosszúságút, majd párhuzamos szelők segítségével megkapjuk az x hosszúságú szakaszt
- a BC-vel párhuzamost húzunk x távolságra, a párhuzamos és a belső szögfelezők metszéspontjai megadják a keresett középpontokat