XVIII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Gyula, 2009. március 12-16.

10. osztály

1. feladat: Egy háromszög belsejében felvett tetszőleges ponton át a háromszög oldalaival párhuzamosan egyeneseket húzunk. Ezek az egyenesek a háromszög területét hat részre osztják. A keletkezett háromszögek területeit jelöljük t_1, t_2 és t_3-mal és az eredeti háromszög területét pedig T-vel.
Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{T} = \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}$

Oláh György (Komárom)

2. feladat: Az f függvény értelmezési tartománya a 0-tól különböző valós számok halmaza. Az értelmezési tartomány minden x elemére teljesül az $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ összefüggés. Mely x valós számokra áll fenn az $f(x) = f(-x)$ egyenlőség?

Kántor Sándorné (Debrecen)

3. feladat: Legyen $p \leq 3$ egy adott prímszám. Oldjuk meg az egész számok halmazán az

$$x^3 + y^3 = x^2y + xy^2 + p^{2009}$$

egyenletet!

Bencze Mihály (Brassó)

4. feladat: Oldjuk meg a pozitív valós számok halmazán a következő egyenletrendszert!

$$x + y + z = 9 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+3} = \frac{9}{13} \qquad (2)$$

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

5. feladat: Jelölje H az ABC háromszög magasságpontját, O pedig a köré írt körének középpontját. Az A csúcsból a BC egyenesre bocsájtott merőleges talppontja rajta van az AC oldal felező merőlegesén. Határozzuk meg a $\frac{CH}{BO}$ arányt!

Sipos Elvira (Zenta)

6. feladat: Legalább hány számot kell kihúznunk az $1, 2, 3, \ldots, 2009$ számok közül ahhoz, hogy a megmaradó számok egyike se legyen két másik, tőle különböző megmaradó szám szorzata?

Katz Sándor (Bonyhád)