# *XVIII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny*

*Gyula, 2009. március 12–16.*

## 10. osztály

**1. feladat:** Egy háromszög belsejében felvett tetszőleges ponton át a háromszög oldalaival párhuzamosan egyeneseket húzunk. Ezek az egyenesek a háromszög területét 6 részre osztják. A keletkezett háromszögek területeit jelöljük $t_1$, $t_2$ és $t_3$-mal és az eredeti háromszög területét pedig $T$-vel.
Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{T} = \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}$!

*Oláh György (Komárom)*

**Megoldás:** Legegyszerűbben úgy jutunk célhoz, ha felhasználjuk azt az ismert tételt, mely szerint hasonló háromszögek területeinek négyzetgyökei úgy aránylanak egymáshoz, mint a megfelelő oldalak. Jelölje $a_1$, $a_2$, $a_3$ egy kiszemelt oldalból a megfelelő egyenesekkel kimetszett szakaszok hosszát. Ekkor

$$\sqrt{t_1} : \sqrt{T} = a_1 : (a_1 + a_2 + a_3)$$
$$\sqrt{t_2} : \sqrt{T} = a_2 : (a_1 + a_2 + a_3)$$
$$\sqrt{t_3} : \sqrt{T} = a_3 : (a_1 + a_2 + a_3)$$

Összeadva:

$$\frac{\sqrt{t_1}}{\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{t_2}}{\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{t_3}}{\sqrt{T}} = \frac{a_1+a_2+a_3}{a_1+a_2+a_3} = 1,$$

ahonnan

$$\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3} = \sqrt{T}.$$

---

**2. feladat:** Az $f$ függvény értelmezési tartománya a 0-tól különböző valós számok halmaza. Az értelmezési tartomány minden $x$ elemére teljesül az $f(x)+2f(\frac{1}{x}) = 3x$ összefüggés. Mely $x$ valós számokra áll fenn az $f(x) = f(-x)$ egyenlőség?

*Kántor Sándorné (Debrecen)*

**Megoldás:** Helyettesítsünk $x$ helyére $\frac{1}{x}$-et! Ekkor $f(\frac{1}{x}) = 3 \cdot \frac{1}{x} - 2f(x)$.
Visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe:

$$f(x) + 2(\frac{3}{x} - 2f(x)) = 3x,$$

amiből $-3f(x) + \frac{6}{x} = 3x$, azaz

$$f(x) = \frac{2-x^2}{x},\ f(-x) = \frac{x^2-2}{x}.$$

A $\frac{2-x^2}{x} = \frac{x^2-2}{x}$ egyenlet megoldásai $x = \pm\sqrt{2}$, amik valóban megoldásak, és ebben az esetben fennáll az $f(x) = f(-x)$ egyenlőség.

---

**3. feladat** Legyen $p \geq 3$ egy adott prímszám. Oldjuk meg az egész számok halmazán az

$$x^3 + y^3 = x^2y + xy^2 + p^2009$$

egyenletet!

*Bencze Mihály (Brassó)*

**Megoldás:**

$$x^3+y^3-x^2-xy^2=p^{2009} \Leftrightarrow (x-y)^2(x+y)=p^{2009}$$

Ha $x-y=\pm p^k$, akkor $x+y==p^{2009-2k}$, azaz

$$\begin{cases} x= & \frac{p^{2009-2k}+p^k}{2} \\ y= & \frac{p^{2009-2k}-p^k}{2} \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} x= & \frac{p^{2009-2k}-p^k}{2} \\ y= & \frac{p^{2009-2k}+p^k}{2} \end{cases} \qquad k\in\{0,1,...,2009\}.$$

$x, y$ egész, mivel $p^{2009-2k}$, $p^k$ páratlan, így $2|p^{2009-2k}\pm p^k$.

---

**4. feladat:** Oldjuk meg a pozitív vaqlós számok halmazán a következő egyenletrendszert!

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+3}=\frac{9}{13} \end{cases}$$

*Kovács Béla (Szatmárnémeti)*

**Megoldás:**

Az első egyenlet: $x+y+1+z+3=13$ alakban írható. A két egyenletet összeszorozva, a számtani és a harmonikus középarányosok közötti egyenlőtlenség alapján:

$$9=(x+y+1+z+3)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+3}\geq 9.$$

Egyenlőség csak egyenlő számok esetén lehet.
Következik: $x=y+1=z+3=\frac{13}{3}$.
Megoldás: $(\frac{13}{3},\frac{10}{3},\frac{4}{3})$, ami az egyetlen pozitív megoldás.

---

**5. feladat:** Jelölje $H$ az $ABC$ háromszög magasságpontját, $O$ pedig a köré írt körének középpontját. Az $A$ csúcsból a $BC$ egyenesre bocsájtott merőleges talppontja rajta van az $AC$ oldal felező merőlegesén. Határozzuk meg a $\frac{CH}{BO}$ arányt!

*R. Sipos Elvira (Zenta)*

**Megoldás:**

1. eset: Tegyük fel, hogy $\gamma<90°$. Legyen $A'$ az $A$ csúcs merőleges vetülete a $BC$ oldalra, $B_1$ az $AC$ oldal felezőpontja, $C_1$ pedig az $AB$ oldal felezőpontja. A feladat feltételei alapján $AA'C$ háromszög derékszögű, miközben $A'$ illeszkedik az $AC$szakasz szimmetriatengelyére, vagyis egyenlőszárú is egyben. Tehát $BCA\angle=45°$. Ezért a neki megfelelő középponti szög $BOA\angle=90°$.

Az $AOB$ háromszög derékszögű és egyenlő szárő ($AO=BO=R$: a körülírt kör sugara), vagyis $BOC_1\angle=45°$, azaz $C_1O$ és $BO$ az egyenlő szárú derékszögű háromszög befogója és átfogója, azaz $\sqrt{2}CO_1=OB$.

2. eset: Ha $\gamma=90°$, akkor hasonlóan az előzőkhöz $\gamma=135°$, így is $BOA\angle=90°$, tehát $BOC_1\angle=45°$, így $BO=\sqrt{2}\cdot OC_1$ fennáll akkor is.

Ha $O$-ból a $CB$ oldalra merőlegest bocsájtunk és a talppontját $C_2$-vel jelöljük, akkor a $C_1OC_2\triangle$ hasonló a $HCA\triangle$-höz, a hasonlósági arány $1:2$, így $CH=2OC_1$, vagyis $\frac{CH}{BO}=2\cdot\frac{C_1O}{BO}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

---

**6. feladat:** Legalább hány számot kell kihúznunk az $1,2,3,...,2009$ számok közül ahhoz, hogy a megmaradó számok egyike se legyen két másik, tőle különböző megmaradó szám szorzata?

*Katz Sándor (Bonyhád)*

**Megoldás:**

I.: A $2,3,...,44$ számokat elegendő kihúzni.
$45\cdot 46=2070$, ezért a megmaradók szorzata nem lehet a megmaradók között.

II.: 43-náől kevesebb szám nem elég. Képezzük a következő számhármast:

$$(2,87,2\cdot 87),(3,86,3\cdot 86),...,(44,45,44\cdot 45),$$

ahol $45, 46, ..87$ a legkisebb 43 db egytől különböző megmaradó szám.
Ezek mind különböző számok, mert az első és második elemek növekvő, ill. csökkenő sorozatot alkoznak. A harmadik elemek is növekvő sorozatot adnak, mert $44 < 45$ és ha $x < y$ , akkor

$$(x-1)(y-1) < xy$$

$$xy - y + x - 1 < xy$$

$$x < y + 1$$

valóban igaz.

Ha csak 43-nál kevesebbet húzok ki, akkor valamelyik háőrmas együtt a megmaradók közt lest olyan 2 szám, melyek szorzata is a megmaradók közt lesz.

Tehát legalább 43 számot ki kell húzni.

**Megjegyzés:** $1, 2, ..., 43$ számokat kihúzva a $44 \cdot 45 = 1980$ miatt $44, 45, 1980$ is a megmaradók közt lenne.