XVIII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Gyula, 2009. március 12–16.

9. osztály

1. feladat: Oldjuk meg a természetes számok halmazán az $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2009}$

Kántor Sándor (Debrecen)

Megoldás: Megoldásként nyilván csak 2009-nél nagyobb egész számok jöhetnek szóba. Az egyenlet ekvivalens az $(x-2009)(y-2009) = 2009^2$ egyenlettel. Annyi megoldás van, amennyi tényezője van 2009^2-nek, mert ezeket a tényetőket $(x-2009)$-cel azonosítva x-et megkapjuk, és ehhez y egyértelmű. Mivel $2009 = 7^2 \cdot 41$, azaz $2009^2 = 7^4 \cdot 41^2$, ezért 2009^2 pozitív osztóinak száma $(4+1)(2+1) = 15$.

Tehát az egyenlet keresett megoldásainak száma 15, amelyekhez az x értékét az előbbiek szerint az $x - 2009 = 1; 7; 7^2; 7^3; 7^4; 41; 7\cdot 41; 7^2\cdot 41; 7^3\cdot 41; 7^4\cdot 41; 41^2; 7\cdot 41^2; 7^2\cdot 41^2; 7^3\cdot 41^2; 7^4\cdot 41^2$,
egyenlőségekből az x-hez tartozó y pár rendre az
$y - 2009 = 7^4\cdot 41^2; 7^3\cdot 41^2; 7^2\cdot 41^2; 7\cdot 41^2; 41^2; 7^4\cdot 41; 7^3\cdot 41; 7^2\cdot 41; 7^2\cdot 41; 7\cdot 41; 7^4; 7^3; 7^2; 7; 1$
osztópárok egyenlőségeiből kapjuk.

---

2. feladat: Az $ABCD$ deltoidban az A és C csúcsnál derékszög van, és a BD átló $12cm$. Az ábra szerint a deltoidba három azonos oldalhosszúságú rombusz írható. Mekkora a deltoid B és D csúcsánál levő szöge és az AC átló hossza?

Bencze Mihály (Brassó)

Megoldás: Legyen $DBA\angle = \alpha$.

Sorban a BEF, EFG, FGH, HAD egyenlő szárú háromszögekben a szögeket ill. a BEF, BFG, BGH, BHA háromszögekben a külső szögeket kiszámolva a $BDA\angle = 5\alpha = 90°$ értékig jutunk.
Innen $\alpha + 5\alpha = 90°$, azaz $\alpha = 15°$. Tudjuk, hogy a $15°$-os szöggel rendelkező (ABD) derékszögű hátomszögben az átfogóhoz tartozó magasság az átfogó negyedede, ezért $AC = 6cm$. A deltoid b és D csúcsnál lévő két szöge $30°$ és $150°$.

---

3. feladat: Adjuk meg az összes olyan n természetes számot, amelye $2^8 + 2^11 + 2^n$ négyzetszám!

Eigel Ernő (Gyula)

Megoldás: Mivel $2^{11} + 2^8 = 2^8(2^3+1) = 48^2$, akkor $2^n + 48^2 7k^2$ (a keresett négyzetszám). Így $2^n = (k-48)(k+48)$, tehát a $k-48$ és a $k+48$ is 2-nek valamilyen egyész kitevős hatványa kell legyen, vagyis $k - 48 = 2^p$, $k + 48 = 2^q$. Egymásból kivonva, ($p < q$, $2^q - 2^p = 96 = 2^5 \cdot 3$, azaz $2^p \cdot (2^{p-q} - 1) = 2^5 \cdot 3$, vagyis ha $p = 5$, akkor $2^{q-5} = 2^2$, vagyis $q = 7$, tehát $2^n = 2^{p+q} = 2^{12} \Leftarrow n = 12$ a keresett természetes szám.

---

4. feladat: Oldjuk meg az $\frac{x}{x+1} + \frac{2x}{(x+1)(2x+1)} + \frac{3x}{(x+1)(2x+1)(3x+1)} + ... + \frac{2009x}{(x+1)(2x+1)...(2009x+1)} > 1$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

Balázsi Borbála (Beregszász)

Megoldás:
Mivel $\frac{kx}{(x+1)(2x+1)...(kx+1)} = \frac{(kx+1)-1}{(x+1)(2x+1)...(kx+1)} = \frac{1}{(x+1)(2x+1)...((k-1)x+1)} - \frac{1}{(x+1)(2x+1)...(kx+1)}$, ezért az egyenlőtlenség bal oldala:
$\frac{x}{x+1} + \frac{2x}{(x+1)(2x+1)} + \frac{3x}{(x+1)(2x+1)(3x+1)} + ... + \frac{2009x}{(x+1)(2x+1)...(2009x+1)} = 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)(2x+1)} + \frac{1}{(x+1)(2x+1)} - \frac{1}{(x+1)(2x+1)(3x+1)} + ... + \frac{1}{(x+1)(2x+1)...(2008x+1)} - \frac{1}{(x+1)(2x+1)...(2009x+1)} = 1 - \frac{1}{(x+1)(2x+1)...(2009x+1)}$),
azaz az $\frac{1}{(x+1)(2x+1)...(2009x+1)} < 0$ egyenlőtlenséget kell megoldani. A megoldás: $(-\infty; -1) \bigcup (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}) \bigcup (-\frac{1}{4}; -\frac{1}{5}) \bigcup ... \bigcup (-\frac{1}{2008}; -\frac{1}{2009})$.

5. feladat: Húsz személy mindegyike a húszból tíz másiknak küld levelet. Van-e két olyan személy, akik között volt levélváltás?

Szabó Magdolna (Szabadka)

Megoldás: A csoportban **van** olyan személy, aki legalább 10 levelet kapott, mert ellenkező esetben legfeljebb $9 \cdot 20 = 180$ elküldött levél lenne, amely kevesebb 200-nál, az összes elküldött levelek számánál! Ez a személy levelet küldött a többi 19 személy közül 10-nek. Ha csak attól a 9-től kapott volna levelet, akinek ő nem küldött, akkor csak 9 levelet kapott volna, pedig legalább 10-et kapott, tehát kellett, hgoy olyantól is kapjon, akinek ő küldött, azaz volt levélváltás.

---

6. feladat: Az $ABCF$ téglalap DC oldala, mint átmérő fölé (átmérőre) kört rajzolunk. Húzzunk a körhöz a téglalap A csúcsábül az AD egyenesétől különbözp érintőt, az érintési pont legyen E. A téglalap BC oldalegyenesét az AE egyenes a G pontban, a DE egyenes a H pontban metszi.

a) Bizonyítsuk be, hogy az EGH háromszög egyenlő szárú!

b) Mekkora a téglalap oldalainak aránya, ha az EGH háromszög szabályos?

c) Bizonyítsuk be, hogy ha az EGH háromszög szabályos, akkor a kör F középpontja, az E érintési pont és a téglalap B csúcsa egy egyenesen van!

Nemecskó István (Budapest)

Megoldás:

a) Legyen $EDF\angle = \alpha$. Mivel a DFE háromszög egyenlő szárú, ezért $DEF\angle = \alpha$. Tehát EGH háromszög egyelő szárú.

Ha a téglalap b oldala kisebb vagy ugyanakkora, mint $a/2$, tehát a körvonal metszi vagy érinti AB oldalt, akkor is teljesül az állítás. Részletezzök a metszés esetét: az állítás ugyanazokkal a lépésekkel leolvasható az ábráról.

b) Elég $b > \frac{a}{2}$ esetet nézni, mert ellenkező esetben az $EHG\triangle$ derékszögű vagy tompaszögű, tehát nem lehet szabályos.

Ha az EGH háromszög szabályos, akkor minden szöge 60°-os, tehát $GHE = 60°$. Így $HDF\angle = 30°$. Ekkor az AED háromszögnek is minden szöge 60°, tehát szabályos háromszög, így E pont rajta van a téglalap AB oldalával párhuzamos szimmetriatengelyén. Legyen az EGH szabályos háromszög oldalainak hossza x. Az $FEGC$ négyszög deltoid, tehát $GC = x$, a szimmetria miatt $BH = x$ is teljesól. Így a téglalap b oldala azEGH háromszög oldalának háromszorosa ($b = 3x$). /** A DHC háromszög szögei 30°, 60° ill. 90°-osak, befogói a és $2x$. Tudjuk, hogy az ilyen derékszögű háromsz9gek befogóinak aránya $\sqrt{3}$, tehát $\frac{a}{2x} = \sqrt{3}$, vagyis a keresett arány: $\frac{a}{b} = \frac{a}{3x} = \frac{a}{2x} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

c) A BGE háromszög egyik szöge ($EGH\angle$) 60°-os és a közrezárt oldalak x és $2x$, tehát ez egy derékszögű háromszög. Vagyis BE merőleges az AG-re, de FE sugár és AG érintő, tehát FE is merőleges AG-re. Ezzel beláttuk, hogy F, E és B egy egyenesbe esik.