XVII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Kassa, 2008. március 6-9.

12. osztály

1. feladat: n darab ceruzát egyenként két részre törünk. Az így kapott $2n$ darab ceruzát kettesével találomra párosítjuk. Mi a valószínűsége annak, hogy minden így kapott párból összeragasztható az eredeti ceruza?

Bencze Mihály (Brassó)

1. feladat megoldása: Annak a valószínűsége, hogy a $2n$ darab ceruzából egy a saját felével legyen összeragasztva $\frac{1}{2n-1}$. Ezek után még marad $2n-2$ ceruza. Kiválasztunk egyet; annak a valószínűsége, hogy ez a saját felével legyen összeragasztva $\frac{1}{2n-3}$. Hasonlóan folytatjuk a gondolatmenetet.

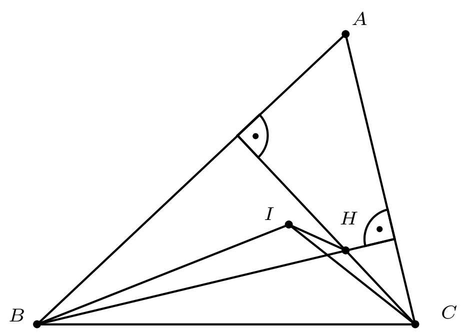
Mivel függetlenek az események, a valószínűségeket összeszorozzuk. Így a keresett valószínűség:

$$\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2n-3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{2^n\cdot n!}{(2n)!1}.$$

2. feladat: Az háromszögben $B\angle=50°$, $C\angle=70°$, H a magasságok metszéspontja és I a háromszögbe írt kör középpontja. Számítsátok ki az IHC háromszög belső szögeit.

Neubauer Ferenc (Munkács)

2. feladat megoldása: Az I pont egyúttal a szögfelezők metszéspontja is. Ezért $BCI\sphericalangle=35°$, $IBC\sphericalangle=25°$. $BCH\sphericalangle=90°-50°=40°$. Ebből $ICH\sphericalangle=40°-35°=5°$. $BIC\sphericalangle=180°-(25°+35°)=120°$; $BHC\sphericalangle=180°-HBC\sphericalangle-HCB\sphericalangle=180°-(90°-70°)-(90°-50°)=120°$.



Akkor $BIHC$ négyszög húrnégyszög, mivel a BC oldal az I és H csúcsokból egyaránt $120°$-os szög alatt látszik. Ebben a négyszögben $IHC\sphericalangle=180°-IBC\sphericalangle=180°-25°=155°$, ami egyúttal az IHC háromszögnek is egyik szöge. Végül $CIH\sphericalangle=180°-(5°+155°)=20°$.

Felelet: $20°, 155°, 5°$.

3. feladat: Egy függvény minden valós x,y számpárra eleget tesz az $f(x)+f(y)=f(x+y)-xy-1$ függvényegyenletnek. Ha $f(1)=1$, akkor van-e olyan 1-től különböző n egész szám, amelyre $f(n)=n$?

Oláh György (Komárom)

3. feladat megoldása: Tudjuk, hogy $f(1)=1$, ezért $f(0)+f(1)=f(1)-1$, amiből $f(0)=-1$. De $f(1)+f(1)=f(2)-2$, ezért $f(2)=4$. Továbbá $f(1)+f(2)=f(3)-3$, amiből $f(3)=8$. Folytatva az eddigi eljárást: $f(4)=13, f(5)=19, f(6)=26,\ldots$.

Konkrét eseteket vizsgálva azt sejteti, hogy bármely egész n szám esetén, ha $f(1)=1$, akkor $f(n)=f(n-1)+n+1$.

Ezt a sejtést könnyű ellenőrizni, ugyanis $f(1)+f(n-1)=f(n)-(n-1)-1$, ami $f(1)=1$ miatt egyenértékű a következővel: $f(n)=f(n-1)+n+1$. Az is könnyen belátható, hogy minden egész n számra

$$f(n)=-1+\frac{n(n+3)}{2}.$$

Ezután már egyszerű arra válaszolni, hogy létezik-e olyan n egész szám, amelyre $f(n)=n$ $(n\neq 1)$. A kérdés egyenértékű azzal, hogy van-e 1-től különböző egész megoldása az $n=-1+\frac{n(n+3)}{2}$ egyenletnek. Átalakítások után a következőt kapjuk: $(n-1)(n+2)=0$, ami pontosan akkor teljesül, ha $n=1$ v. $n=-2$. Tehát van 1-től különböző olyan egész szám, amelyre $f(n)=n$, mégpedig az $n=-2$.

4. feladat: Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n\geq 2)$ egész számokra érvényes

$$|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|-|x_1+x_2+\ldots+x_n|\in\{-2,2\}.$$

Igazoljátok, hogy létezik legalább egy x_k ezek közül, amelyre $x_k\in\{-1,1\}$.

Bencze Mihály (Brassó)

4. feladat megoldása: Legyen A a pozitív egészek összege és B a negatív egészek összege.

Akkor $\sum_{k=1}^{n}|x_k|-\left|\sum_{k=1}^{n}x_k\right|\in\{-2,2\}\Leftrightarrow A-B-|A+B|\in\{-2,2\}$.

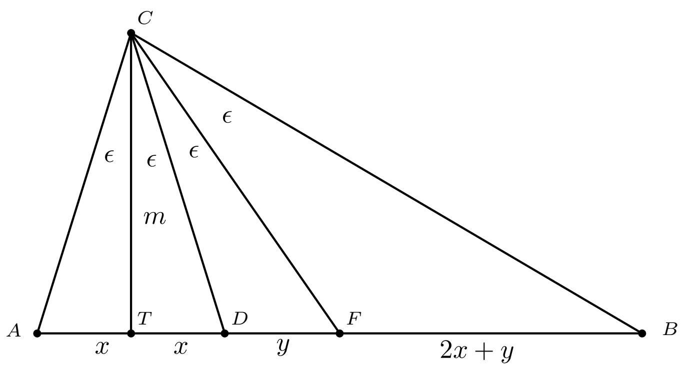
1. Ha $A-B-|A+B|=-2$
   a) $A+B\geq 0\Rightarrow A-B-A-B=-2\Rightarrow B=1$
   b) $A+B<0\Rightarrow A-B+A+B=-2\Rightarrow A=-1$
2. Ha $A-B-|A+B|=2$
   a) $A+B\geq 0\Rightarrow A-B-A-B=2\Rightarrow B=-1$
   b) $A+B<0\Rightarrow A-B+A+B=2\Rightarrow A=1$

Tehát $A,B\in\{-1,1\}\Rightarrow$ legalább egy $x_k\in\{-1,1\}$.

5. feladat: Bizonyítsátok be, hogy ha egy háromszögben az egyik csúcsból induló magasságvonal, súlyvonal és szögfelező négy egyenlő részre osztja a szöget, akkor a háromszög derékszögű.

Egyed László (Baja)

5. feladat megoldása: Készítsünk egy ábrát!



A feltételek miatt: $AT = TD = x$ és $AF = FB = 2x + y$.

CAT háromszögben: $\operatorname{tg}\epsilon = \dfrac{x}{m}$

CTF háromszögben: $\operatorname{tg}2\epsilon = \dfrac{x+y}{m}$

CTB háromszögben: $\operatorname{tg}3\epsilon = \dfrac{3x+2y}{m} = 2\cdot\dfrac{x+y}{m} + \dfrac{x}{m} = 2\operatorname{tg}2\epsilon + \operatorname{tg}\epsilon$

Az addíciós tétel miatt: $\operatorname{tg}3\epsilon = \dfrac{\operatorname{tg}2\epsilon + \operatorname{tg}\epsilon}{1 - \operatorname{tg}2\epsilon\cdot\operatorname{tg}\epsilon}$

A kettőt összetéve: $2\operatorname{tg}2\epsilon + \operatorname{tg}\epsilon = \dfrac{\operatorname{tg}2\epsilon + \operatorname{tg}\epsilon}{1 - \operatorname{tg}2\epsilon\cdot\operatorname{tg}\epsilon}$ és a $\operatorname{tg}2\epsilon = \dfrac{2\operatorname{tg}\epsilon}{1-\operatorname{tg}^2\epsilon}$ addíciós tételt felhasználva adódik, hogy

$$2\cdot\frac{2\operatorname{tg}\epsilon}{1-\operatorname{tg}^2\epsilon} + \operatorname{tg}\epsilon = \frac{\frac{2\operatorname{tg}\epsilon}{1-\operatorname{tg}^2\epsilon} + \operatorname{tg}\epsilon}{1 - \frac{2\operatorname{tg}\epsilon}{1-\operatorname{tg}^2\epsilon}\cdot\operatorname{tg}\epsilon}.$$

$\operatorname{tg}\epsilon \neq 0$, mert háromszög belső szögének a negyedrésze. Ezzel elosztva az egyenlet mindkét oldalát és bevezetve a $\operatorname{tg}^2\epsilon = x$ jelölést a következő egyenlethez jutunk:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{1-x} + 1 &= \frac{\frac{2}{1-x}+1}{1-\frac{2x}{1-x}}\\
\frac{5-x}{1-x} &= \frac{3-x}{1-3x}\\
(5-x)\cdot(1-3x) &= (3-x)\cdot(1-x)\\
5 - 16x + 3x^2 &= 3 - 4x + x^2\\
2x^2 - 12x + 2 &= 0\\
x_{1,2} &= \frac{6\pm\sqrt{36-4}}{2} = 3\pm 2\cdot\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Mivel háromszög belső szögének negyedrészéről van szó, így

$$0^\circ < \epsilon < 45^\circ \Rightarrow 0 < \operatorname{tg}\epsilon < 1 \Rightarrow 0 < \operatorname{tg}^2\epsilon < 1,$$

ezért csak $\operatorname{tg}^2\epsilon = 3 - 2\cdot\sqrt{2}$ jöhet szóba, amiből $\operatorname{tg}\epsilon = \sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$.

Tehát $\epsilon = 22,5^\circ \Rightarrow 4\cdot\epsilon = 90^\circ$.

6. feladat: Határozzátok meg azt az (x, y) számpárt, amelyre az

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-8x+16} + \sqrt{x^2+y^2-16x-18y+145} +$$
$$+\sqrt{x^2+y^2+8x-24y+160} + \sqrt{x^2+y^2+4x+2y+5}$$

értéke minimális lesz.

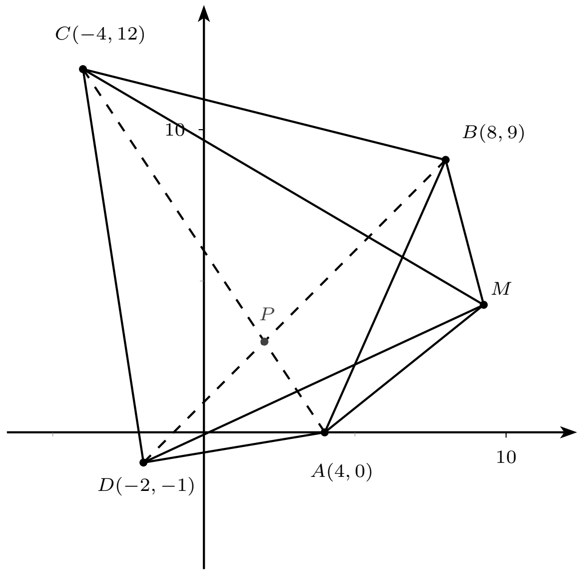
Olosz Ferenc (Szatmárnémeti)

6. feladat megoldása: Észrevesszük, hogy a gyökjelek alatt teljes négyzetek összegét alakíthatjuk ki:

$$f(x,y) = \sqrt{(x-4)^2+y^2} + \sqrt{(x-8)^2+(y-9)^2} + \sqrt{(x+4)^2+(y-12)^2} + \sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}$$

Ha vesszük az $A(4,0), B(8,9), C(-4,12), D(-2,-1)$ pontokat és a tetszőleges $M(x,y)$ pontot a síkból, akkor $ABCD$ egy konvex négyszög és az $f(x,y)$ függvény az $MA + MB + MC + MD$ távolságok összegét adja meg.

Annak az (x, y) számpárnak a keresése, amelyre $f(x,y)$ minimális lesz megegyezik a következő mértanfeladattal: *Adott az $ABCD$ konvex négyszög és legyen M a négyszög síkjának egy tetszőleges pontja. Határozzuk meg az M helyzetét úgy, hogy az $MA + MB + MC + MD$ összeg a legkisebb legyen.*



Bebizonyítjuk, hogy az összeg akkor a legkisebb, ha M a négyszög átlóinak metszéspontjában található:

Legyen P az átlók metszéspontja. Ha M az egyik átlón sincs rajta, akkor $MA + MC > AC$ és $MB + MD > BD$. Összeadva az egyenlőtlenségeket kapjuk: $MA + MB + MC + MD > AC + BD = PA + PB + PC + PD$.

Ha M az egyik átló, például a (BD), egy pontja, akkor $MB + MD = BD$ és $MA + MC > AC$, tehát $MA + MB + MC + MD > AC + BD = PA + PB + PC + PD$.

Ha $M = P$, akkor $(MA + MB + MC + MD)_{min} = AC + BD$.

Tehát a feladat kérdésére megkapjuk a választ, ha meghatározzuk a négyszög átlóinak metszéspontját. Az AC egyenes egyenlete $3x + 2y - 12 = 0$, a BD egyenes egyenlete $x - y + 1 = 0$, a két egyenletből alkotott egyenletrendszer megoldásával kapjuk a metszéspont koordinátáit, vagyis $P(2, 3)$.

Tehát a $(2, 3)$ számpárra lesz az $f(x, y)$ értéke minimális:$f(2, 3) = 4\sqrt{13} + 10\sqrt{2}$.