XVII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Kassa, 2008. március 6-9.

11. osztály

1. feladat: Fejeződhet-e a 3^n valamely természetes n számra 0001-re?

Zolnai Irén (Újvidék)

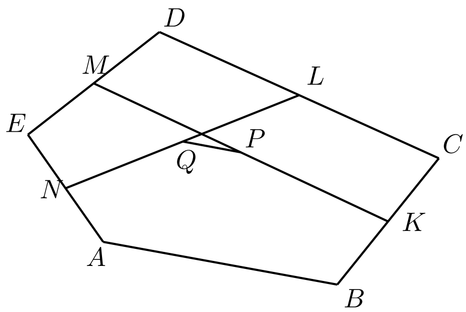
1. feladat megoldása: Igen, mivel a $3, 3^2, \ldots, 3^n$ között a skatulya-elv alapján van két olyan, amelynek az utolsó négy számjegye megegyező. Ha ezt a kettőt kivonjuk egymásból, az utolsó négy számjegy nulla lesz. Ha ez a 3^k és 3^l, $k > l$, akkor $3^k - 3^l = 10^4 \cdot m, m \in \mathbb{Z}$.

Nem nehéz megmutatni, hogy a keresett szám 3^{k-l}, mert

$$3^{k-l} - 1 = \frac{3^k}{3^l} - 1 = \frac{3^k - 3^l}{3^l} = \frac{10^4 \cdot m}{3^l} = 10^4 \cdot p,$$

ahol $p \in \mathbb{Z}$, mert 10^4 nem osztható 3-mal.

2. feladat: A K, L, M, N az $ABCDE$ ötszög BC, CD, DE, EA oldalainak felezőpontjai, a Q és P pontok pedig az LN, KM szakaszok felezőpontjai. Bizonyítsátok be, hogy $PQ||AB$-vel és határozzátok meg a szakaszok hosszának arányát.



Mészáros József (Galánta)

2. feladat megoldása: A feladatot vektorok segítségével oldjuk meg. Legyen az O a sík tetszőleges pontja. Ekkor felírható:

$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM}\right)$,

$\overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$,

$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE}\right)$,

$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$,

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}\right)$,

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$,

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{ON} + \frac{1}{2}\overrightarrow{NL} = \overrightarrow{ON} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OL} - \overrightarrow{ON}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OL}\right)$.

Továbbá

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OL}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}\right)\right] =$$
$$\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}.$$

Látható, hogy $PQ||AB$-vel és a szakaszok hosszának aránya: $\frac{1}{4}$.

3. feladat: A természetes számok halmazán értelmezett f függvényre teljesül a következő egyenlőség: $f(1) + 2^2 f(2) + \ldots + n^2 f(n) = n^3 f(n)$ tetszőleges $n \geq 1$ esetén. Ha $f(1) = 2008$, határozzátok meg $f(2008)$ értéket.

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

3. feladat megoldása: Az adott egyenlőséget felírjuk $(n+1)$-re és kivonjuk belőle az adott egyenlőséget:

$$(n+1)^2 \cdot f(n+1) = (n+1)^3 f(n+1) - n^3 f(n) \Leftrightarrow n^3 f(n) = n(n+1)^2 f(n+1) \Leftrightarrow$$

$$n^2 \cdot f(n) = (n+1)^2 f(n+1) \Leftrightarrow \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

bármely $n \geq 1$ esetén.

A kapott összefüggést felírjuk $1, 2, \ldots, n$ értékekre és összeszorozzuk:

Kapjuk: $\frac{f(n+1)}{f(1)} = \frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow f(n) = \frac{1}{n^2} f(1)$ bármely $n \geq 1$ esetén.

Mivel $f(1) = 2008$, következik, hogy $f(n) = \frac{2008}{n^2}$. Ennek alapján $f(2008) = 1/2008$.

4. feladat: Oldjátok meg a $60p^2 + 57q = 2007$ egyenletet, ha p és q pozitív prímszámok.

Egyed László (Baja)

4. feladat I. megoldása: Nyilvánvaló, hogy a $60p^2 + 57q = 2007$ egyenletnél a q nem lehet páros, mert akkor a bal oldal páros, míg a jobb oldal páratlan lenne. Ha $p = 2$, akkor $q = 31$, ami megoldása az egyenletnek. Ha $q = 3$, akkor p-re nem egész számot kapunk, így $q > 3$ lehet csak.

A 3-nál nagyobb prímszámok $6k + 1$ vagy $6k - 1$ alakúak.

Legyen először $q = 6k + 1$. Ekkor $60p^2 + 57(6k + 1) = 2007$, vagyis $60p^2 + 342k = 1950$, azaz $10p^2 + 57k = 325$. A $p = 2$ esetet már vizsgáltuk, így $p \geq 3$. A $p = 3$ nem ad egész megoldást k-ra, így $p > 3$ és páratlan. A 3-nál nagyobb prímszámok négyzete 12-vel osztva 1 maradékot ad, és így $p^2 = 12n + 1$. Ezt felhasználva az egyenletünk a következő lesz: $10(12n + 1) + 57k = 325$, azaz $120n + 57k = 315$. A pozitív egész számok halmazán ennek az egyenletnek nincs megoldása. Így $p \geq 3$ és $q = 6k + 1$ esetén az eredeti egyenletnek nincs megoldása.

Legyen most $q = 6k - 1$. Ekkor $60p^2 + 57(6k - 1) = 2007$, azaz $60p^2 + 342k = 2064$, amiből $10p^2 + 57k = 344$. A $p = 3$ most sem ad egész megoldást, így felhasználhatjuk, hogy $p^2 = 12n + 1$ alakú lesz ismét. Így az egyenletünk: $120n + 57k = 334$ alakú lesz. A bal oldal osztható 3-mal a jobb oldal viszont nem, így az egyenletnek a pozitív egész számok halmazán nincs megoldása. Tehát az eredeti egyenletnek csak egy megoldása van a prímszámok halmazán a $p = 2$, $q = 31$ számpár.

4. feladat II. megoldása: $60p^2 \leq 60p^2 + 57q = 2007 \Rightarrow p < 6$, tehát $p \in \{2, 3, 5\}$. Az adott egyenletbe behelyettesítve p helyett 3-t vagy 5-t nem kapunk megoldást, tehát $p = 2, q = 31$ az egyetlen megoldás.

5. feladat: Oldjátok meg a $\log_2\left(x^2 + 4\right) - \log_2 x = 7x^2 + 4x - x^4 - 18$ egyenletet.

Olosz Ferenc (Szatmárnémeti)

5. feladat megoldása: Az egyenlet a $(0, \infty)$-en értelmezett.

$$\log_2\left(x^2 + 4\right) - \log_2 x = \log_2 \frac{x^2 + 4}{x} \geq \log_2 4 = 2,$$

és egyenlőség akkor áll fenn, ha $x=2$.

Tehát $7x^2+4x-x^4-18 \geq 2$,

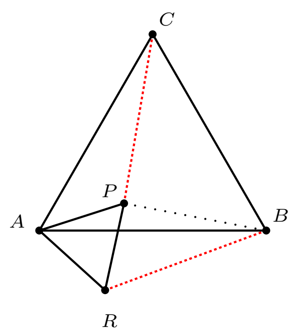
$$x^4-7x^2-4x+20 \leq 0 \Leftrightarrow \left(x^4-8x^2+16\right)+\left(x^2-4x+4\right) \Leftrightarrow \left(x^2-4\right)^2+(x-2)^2 \leq 0$$

amely csak $x=2$ esetén teljesül. Az egyenlet megoldása $x=2$.

6. feladat: Az ABC szabályos háromszög oldalai $\sqrt{p}$ hosszúságúak. A háromszög egy belső pontja az A, B, C pontoktól rendre 1, $\sqrt{r}$, $\sqrt{r+1}$ egység távolságra van, ahol p és r prímszámok. Mekkora az ABC háromszög kerülete?

Bíró Bálint (Eger)

6. feladat megoldása: Forgassuk el az ACP háromszöget az A pont körül $60°$-kal negatív irányba! Az elforgatásnál az A pont képe önmaga, a C pont képe a B pont, hiszen az ABC háromszög szabályos, a P pont képét pedig R-rel jelöltük.



Mivel $AP=AR=1$ és $PAR\sphericalangle=60°$, ezért a PAR háromszög egy 1 oldalú szabályos háromszög, ebből $PR=1$ is következik. A PC szakasz elforgatottja az RB szakasz, így $PC=RB=\sqrt{r+1}$.

Könnyen bizonyítható, hogy az ábrán szereplő BRP háromszög létezik, hiszen a $PR=1$, $PB=\sqrt{r}$ és $RB=\sqrt{r+1}$ szakaszokra rövid számolás után belátható, hogy teljesül az $1+\sqrt{r}>\sqrt{r+1}$ egyenlőtlenség.

Sőt, észrevehetjük, hogy $1+\sqrt{r}^2=\left(\sqrt{r+1}\right)^2$, azaz $PR^2+PB^2=RB^2$, így a Pitagorasz-tétel megfordításából következik, hogy a BRP háromszög derékszögű, melynek derékszögű csúcsa a P pontban van.

Tudjuk, hogy $APR\sphericalangle=60°$ és az előző megállapítás miatt $BPR\sphericalangle=90°$, így $APB\sphericalangle=150°$.

Fölírhatjuk az APB háromszögre a koszinusztételt:

$$AB^2=AP^2+BP^2-2\cdot AP\cdot BP\cdot\cos 150°. \tag{1}$$

(1)-be a megfelelő adatokat behelyettesítjük és figyelembe vesszük, hogy $\cos 150°=-\cos 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ezzel:

$$\sqrt{p}^2=1^2+\sqrt{r}^2+2\cdot\sqrt{r}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{2}$$

(2)-ből a műveletek elvégzése után $p=1+r+\sqrt{3r}$ adódik, ahonnan

$$\sqrt{3r}=p-r-1 \tag{3}$$

következik.

(3) jobb oldala egész szám, tehát a bal oldalnak is egész számnak kell lennie. Ez úgy valósulhat meg, ha $3r$ négyzetszám, de mivel r prímszám, ezért csak $r=3$ lehetséges.

Ebből azonnal következik, hogy következik $p=7$.

Az ABC háromszög kerülete tehát $AB+BC+CA=3\cdot\sqrt{7}$ hosszúságegység.