XVII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Kassa, 2008. március 6-9.

10. osztály

1. feladat: Osztható-e $20^{2008} + 16^{2008} - 3^{2008} - 1$ 323-al? Az állításodat igazold!

Oláh György (Komárom)

2. feladat: Az ABC háromszögben $|AB| = 20e$, $|AC| = 16e$ és $|BC| = 12e$. Egy P középpontú és $2e$ sugarú kör végig gurul az ABC háromszög belsejében úgy, hogy mindig érinti a háromszögnek legalább az egyik oldalát. Mekkora utat tesz meg P addig, amíg először tér vissza a kiindulási helyzetébe?

Dr. Kántor Sándorné (Debrecen)

3. feladat: Egy nagy táblázat „közepére" beírjuk az 1-et, majd az ábrán látható módon „csigavonalban" folytonosan beírjuk az egymást követő egész számokat. Mivel egyenlő a közvetlenül 2008 felett, illetve alatt álló két szám összege?

17	16	15	14	13	
↓	5	4	3	12	
	6	1	2	11	
	7	8	9	10	↑

Kiss Sándor (Nyíregyháza)

4. feladat: Legyen n tetszőleges pozitív egész szám. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} + \frac{1}{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_n} = 2.$$

Bencze Mihály (Brassó)

5. feladat: Legyen az a adott valós szám és az f olyan valós függvény, amelyre teljesül a következő egyenlet tetszőleges valós x, y-ra:

$$f(x + y) = f(x)f(a - y) + f(y)f(a - x).$$

Mennyi az $f(2008)$ értéke, ha $f(0) = \frac{1}{2}$?

Szabó Magdi (Szabadka)

6. feladat: Az ABC háromszög A pontból induló belső szögfelezője a háromszög köré írható kört E pontban metszi. A kör E-beli érintője AC egyenest D-ben, AB egyenest F-ben metszi. Bizonyítsátok be, hogy $\dfrac{|AD| + |AF|}{|AE|} = \dfrac{|FD|}{|BE|}$.

Egyed László (Baja)