XVII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Kassa, 2008. március 6-9.

10. osztály

1. feladat: Osztható-e $20^{2008} + 16^{2008} - 3^{2008} - 1$ 323-al? Az állításodat igazold!

Oláh György (Komárom)

1. feladat megoldása: Megmutatjuk, hogy az adott szám osztható 323-al. A bizonyítást két részben végezzük el. A 323 felbontható két prímszám, a 17 és a 19 szorzatára. Ha bebizonyítjuk, hogy a kifejezés mindkét számmal osztható, akkor megoldottuk a feladatot. Sőt ennél többet is: a 2008 helyett bármely páros hatványra is be tudjuk látni az oszthatóságot.

Első lépésben nézzük meg a 17-el való oszthatóságot.

Ehhez csoportosítsuk át a tagokat így: $\left(20^{2k} - 3^{2k}\right) + \left(16^{2k} - 1\right)$. Ekkor ismert azonosság alapján mindkét zárójelből ki tudjuk emelni a 17-et. Az első zárójelből kiemelhető a $20 - 3 = 17$, a másikból pedig a $16^2 - 1 = (16 - 1) \cdot (16 + 1)$. Ezzel a 17-el való oszthatóságot beláttuk.

Most ismét átcsoportosítjuk a tagokat a 19 kiemeléséhez: $\left(20^{2k} - 1\right) + \left(16^{2k} - 3^{2k}\right)$. Az előbbiek szerint az első tagból kiemelhető $20 - 1 = 19$, a másodikból pedig a $16 + 3 = 19$. Ezzel a 19-el való oszthatóságot beláttuk.

2. feladat: Az ABC háromszögben $|AB| = 20e$, $|AC| = 16e$ és $|BC| = 12e$. Egy P középpontú és $2e$ sugarú kör végig gurul az ABC háromszög belsejében úgy, hogy mindig érinti a háromszögnek legalább az egyik oldalát. Mekkora utat tesz meg P addig, amíg először tér vissza a kiindulási helyzetébe?

Dr. Kántor Sándorné (Debrecen)

2. feladat megoldása: Az ABC háromszög derékszögű, mert oldalainak hosszai pitagoraszi számhármast alkotnak és a derékszög a C csúcsban van. Legyen a BC befogó függőleges helyzetű (csak az egyszerűbb kifejezés lehetősége miatt). Tekintsük a guruló körnek azt a helyzetét, amikor a legfelső helyzetben érinti az AB átfogót és BC befogót. Jelöljük ekkor O-val a kör középpontját és B'-vel az O-ból a BC-re emelt merőleges talppontját, vagyis az érintési pontot.

Nyilván $OB' = 2$, $ABC\sphericalangle = 2 \cdot OBB\sphericalangle = 2\beta$.

$$BB' = 2 \cdot \operatorname{ctg} \beta = 2 \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = 2 \cdot \frac{\sqrt{(1 + \cos 2\beta)/2}}{\sqrt{(1 - \cos 2\beta)/2}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{1 + 12/20}}{\sqrt{1 - 12/20}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}} = 4.$$

Így a P pont által befutott függőleges távolság: $12 - 4 - 2 = 6$, ami éppen a fele az ABC háromszög BC oldala hosszának. Az ABC háromszög és a P pont által befutott háromszög alakú pálya hasonlósága miatt, mivel a hasonlóság aránya $1 : 2$-höz, P pályájának a hossza az ABC háromszög kerületének a fele, vagyis: 24.

3. feladat: Egy nagy táblázat „közepére” beírjuk az 1-et, majd az ábrán látható módon „csigavonalban” folytonosan beírjuk az egymást követő egész számokat. Mivel egyenlő a közvetlenül 2008 felett, illetve alatt álló két szám összege?

17	16	15	14	13	
↓	5	4	3	12	
	6	1	2	11	
	7	8	9	10	↑

Kiss Sándor (Nyíregyháza)

3. feladat megoldása: Folytassuk a táblázat kitöltését és keressünk szabályszerűséget! Látható, hogy a páratlan négyzetszámok egy „félátlóban” helyezkednek el.

A 2008 a $43^2 = 1849$ és $45^2 = 2025$ között helyezkedik el, ezért azt kell megvizsgálnunk, hogy melyik két szám helyezkedik el a 2008 alatt és felett a 43^2 és a $47^2 = 2209$ sorában.

17-tel kisebb a 2008 a 2025-nél, tehát a „felette” lévő sorban az 1849- nél 16-tal kisebb szám van, azaz az 1833. Az „alatta” lévő sorban a 2209-nél 18-cal kisebb szám, azaz a 2191 látható.

A keresett összeg tehát $1833 + 2191 = 4024$.

A gondolatmenet lényegét az alábbi séma teszi szemléletessé.

1833	...	16-tal kisebb	43^2		
2008	...	17-tel kisebb	...	45^2	
2191	...	18-cal kisebb	...	...	47^2

4. feladat: Legyen n tetszőleges pozitív egész szám. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} + \frac{1}{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_n} = 2.$$

Bencze Mihály (Brassó)

4. feladat megoldása: Igazoljuk, hogy $x_k = 1$, ($k = 1, 2, \ldots, n$) az egyetlen megoldás.

Ha $\max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} > 1$, akkor $x_1 + x_2 + \ldots + x_n > n \wedge x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n > 1$,

így $2 = \frac{n}{x_1+x_2+\ldots+x_n} + \frac{1}{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} < 2$ ellentmondás.

5. feladat: Legyen az a adott valós szám és az f olyan valós függvény, amelyre teljesül a következő egyenlet tetszőleges valós x, y-ra:

$$f(x+y) = f(x)f(a-y) + f(y)f(a-x).$$

Mennyi az $f(2008)$ értéke, ha $f(0) = \frac{1}{2}$?

Szabó Magdi (Szabadka)

5. feladat I. megoldása: Az $y = 0$ majd az $x = a$ helyettesítés után

(1) $f(x) = f(x)f(a) + f(0)f(a-x)$

majd $f(a) = [f(a)]^2 + 1/4$, amiből következik, hogy $(f(a) - 1/2)^2 = 0$, azaz $f(a) = 1/2$.

Most az (1) és az $f(a) = 1/2 = f(0)$ alapján következik a

(2) $f(x) = f(a-x)$.

Így a feladatban leírt összefüggés a következőre alakul: $f(x+y) = 2f(x)f(y)$.

Továbbá $1/2 = f(a) = 2f(x)f(a-x) = 2[f(x)]^2$, amiből az következik, hogy $f(x) = \pm 1/2$.

Az $f(b) = -1/2$ ellentmondásra vezet; ugyanis $-1/2 = f(b) = f(b/2 + b/2) = 2[f(b/2)]^2$, ami lehetetlen, tehát $f(x) = 1/2$ minden valós x-re, így az $f(2008) = 1/2$.

5. feladat II. megoldása: Az $x = y = 0$ helyettesítésből megkapjuk, hogy $f(a) = 1/2$. Azután y helyére 0-t ill. a-t helyettesítünk és azt kapjuk, hogy $f(x) = f(a-x)$ ill. $f(x) = f(a+x)$.

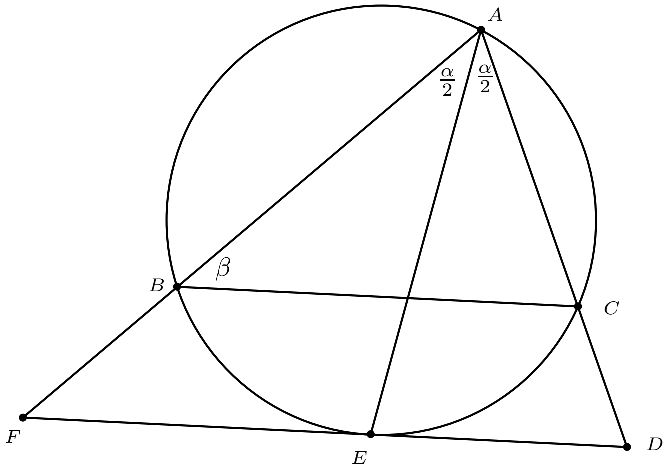
Minden valós x-re teljesül, hogy $f(-x) = f(a-(-x)) = f(a+x) = f(x)$. A feladat feltétele alapján minden x, y-ra következik, hogy: $f(x-y) = f(x)f(a+y) + f(-y)f(a-x) = f(x+y) = f(x)f(a-y) + f(y)f(a-x) = f(x+y)$.

Az $y = x$ helyettesítéssel $f(2x) = f(0) = 1/2$, azaz $f(x) = 1/2$, így az $f(2008) = 1/2$.

6. feladat: Az ABC háromszög A pontból induló belső szögfelezője a háromszög köré írható kört E pontban metszi. A kör E-beli érintője AC egyenest D-ben, AB egyenest F-ben metszi. Bizonyítsátok be, hogy $\dfrac{|AD| + |AF|}{|AE|} = \dfrac{|FD|}{|BE|}$.

Egyed László (Baja)

6. feladat megoldása: Készítsünk ábrát!



A CBE és CAE kerületi szögek azonos ívhez tartoznak, így egyenlőek: $CBE\sphericalangle = CAE\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$.

Az AED érintő szárú kerületi szög, valamint az ABE kerületi szög azonos ívekhez tartoznak, így egyenlőek. $AED\sphericalangle = ABE\sphericalangle = \beta + \frac{\alpha}{2}$.

Ebből viszont következik, hogy AED és ABE háromszögek hasonlóak. Felírhatjuk tehát a hasonlóság arányát: $\frac{ED}{AD} = \frac{BE}{AE}$, ahonnan $ED = \frac{AD \cdot BE}{AE}$.

A szögfelező tételből: $\frac{FE}{ED} = \frac{AF}{AD}$, ahonnan $FE = \frac{AF \cdot ED}{AD}$.

$FD = FE + ED = \frac{AF \cdot ED}{AD} + \frac{AD \cdot BE}{AE}$

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát BE-vel.

$\frac{FD}{BE} = \frac{AF \cdot ED}{AD \cdot BE} + \frac{AD}{AE}$, felhasználva hogy

$ED = \frac{AD \cdot BE}{AE}$, kapjuk:

$\frac{FD}{BE} = \frac{AF}{AD} \cdot \frac{AD}{DE} + \frac{AD}{DE}$, amiből

$\frac{FD}{BE} = \frac{AF+AD}{BE}$.

Ezzel állításunkat bizonyítottuk.