XVI. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Szeged, 2007. március 14-18.

12. osztály

1. feladat: Van-e racionális megoldása az

$$x^2 + y^2 + x + y = 1$$

egyenletnek?

Bogdán Zoltán (Cegléd)

2. feladat: Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt, amely kielégíti az

$$f(x + y) - f(x - y) = 2y(3x^2 + y^2)$$

függvényegyenletet.

Szabó Magda (Szabadka)

3. feladat: Egy 2008 egység befogójú, egyenlőszárú derékszögű ABC háromszöget helyezünk el a koordináta síkon úgy, hogy a derékszög csúcsa (C) az origó legyen, és a két befogó a tengelyek pozitív félegyenesére kerüljön. Hány olyan egész koordinátájú P pont van a háromszöglemezen, amelyre PA^2, PB^2, PC^2 számok egy számtani sorozat egymást követő három tagját adják ebben a sorrendben?

Bíró Bálint (Eger)

4. feladat: Oldjuk meg az alábbi egyenletet a pozitív valós számok halmazán:

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x^a}}}}}} = a,$$

ahol $a > 1$ egy adott valós szám, és az x 2007-szer szerepel benne.

Dr. Kántor Sándor (Debrecen)

5. feladat: Egy négyzetbe egy ABC háromszöget írunk úgy, hogy az A csúcs a négyzetnek is az egyik csúcsa és B, illetve C a négyzet A-n át nem haladó egy-egy oldalára esik. Tudjuk, hogy a háromszögnek az A csúcsnál lévő szöge 45^o-os. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszöget a négyzetünk A-n át nem haladó átlója két egyenlő területű részre osztja.

Dr. Pintér Ferenc (Nagykanizsa)

6. feladat: Adott 2007 pont a síkon úgy, hogy semelyik három ne essen egy egyenesre. Legyen P pontjaink egyike. Számoljuk meg, hogy azon háromszögek között, amelyek csúcsai a 2007 pont közül kerülnek ki, hány olyan van amely P-t belső pontként tartalmazza. Bizonyítsuk be, hogy a kapott szám páros.

Erdős Gábor (Nagykanizsa)