XVI. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Szeged, 2007. március 14-18.

12. osztály

1. feladat: Van-e racionális megoldása az

$$x^2 + y^2 + x + y = 1$$

egyenletnek?

Bogdán Zoltán (Cegléd)

1. feladat I. megoldása: Az egyenletet négyszerezve majd rendezve az

$$(2x + 1)^2 + (2y + 1)^2 = 6$$

alakhoz jutunk. Az $2x + 1 = \frac{X}{Z}$ és $2y + 1 = \frac{Y}{Z}$ helyettesítést végezzük el, ahol Z a $2x + 1$ és $2y + 1$ racionális számok legkisebb közös nevezője. Azaz X, Y és Z egész számok. Ezzel a

$$(D) \qquad X^2 + Y^2 = 6Z^2$$

diophantikus egyenlethez jutunk. Az eredeti egyenlet bármely racionális megoldása (D)-nek egy egész megoldását adja.

Belátjuk, hogy az új egyenletnek csak a triviális $X = Y = Z = 0$ megoldása van. Ez nem származhat az eredeti egyenlet egy racionális megoldásából. Így kapjuk, hogy az eredeti egyenletnek nincs racionális gyöke.

Indirekt módon tegyük fel, hogy a (D) egyenletnek van nem-triviális gyöke. Vegyük azt a nem-triviális gyököt, amelyre $|X| + |Y| + |Z|$ a minimális. X^2 és Y^2 két négyzetszám, amelyek összege hárommal osztható. Ez csak úgy lehet, ha X és Y is osztható hárommal. Ekkor (D) bal oldala kilenccel osztható, így Z-nek is hárommal oszthatónak kell lennie. Ekkor viszont $X/3, Y/3$ és $Z/3$ egy új nem-triviális megoldás, amely ellentmond az eredeti megoldás választásának. Az ellentmondás igazolja állítáunkat.

---

2. feladat: Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt, amely kielégíti az

$$f(x + y) - f(x - y) = 2y(3x^2 + y^2)$$

függvényegyenletet.

Szabó Magda (Szabadka)

2. feladat I. megoldása: Az $x = y = \frac{z}{2}$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$f(z) - f(0) = z^3,$$

tetszőleges z valós számra. Azaz a megoldásoknak $f(x) = x^3 + c$ alakúaknak kell lenni, valamely c konstansra. Könnyen ellenőrizhető, hogy ezek a függvények mind megoldások is.

---

3. feladat: Egy 2008 egység befogójú, egyenlőszárú derékszögű ABC háromszöget helyezünk el a koordináta síkon úgy, hogy a derékszög csúcsa (C) az origó legyen, és a két befogó a tengelyek pozitív félegyenesére kerüljön. Hány olyan egész koordinátájú P pont van a háromszöglemezen, amelyre PA^2, PB^2, PC^2 számok egy számtani sorozat egymást követő három tagját adják ebben a sorrendben?

Bíró Bálint (Eger)

3. feladat I. megoldása: Háromszögünk csúcsai $(0, 2008)$, $(2008, 0)$ és $(0, 0)$. Szimmetria okok miatt feltehetjük, hogy $A = (0, 2008)$, $B = (2008, 0)$. Azon x és y egészeket keressük, amelyre (x, y) a háromszögünkbe esik és

$$x^2 + (y - 2008)^2, (x - 2008)^2 + y^2, x^2 + y^2$$

ebben a sorrendben egy számtani sorozatot alkot.

Először a második feltételt alakítjuk:

$$x^2 + (y - 2008)^2 + x^2 + y^2 = 2((x - 2008)^2 + y^2).$$

Rendezve $2x - y = 1004$, azaz

$$(E) \qquad 2x = 1004 + y.$$

Az (x, y) pontnak a háromszöglemezre esése azt jelenti, hogy $x, y \geq 0$ és $x + y \leq 2008$.

(E) miatt y páros szám lehet csak. $y = 0, 2, 4, 6, \ldots$ lehetőségek valamelyike csak akkor nem vezet megoldáshoz, ha a kiszámolt x-re $x + y > 2008$. Ez $y > 1004$ esetén lesz.

Azaz az $y = 0, 2, 4, \ldots, 1004$ értékek mindegyike (E) alapján egyetlen egy megfelelő pontot ad. Továbbá így megkapjuk az összes számolandó pontot. Ez 503 darab pont.

---

4. feladat: Oldjuk meg az alábbi egyenletet a pozitív valós számok halmazán:

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x^a}}}}}} = a,$$

ahol $a > 1$ egy adott valós szám, és az x 2007-szer szerepel benne.

Dr. Kántor Sándor (Debrecen)

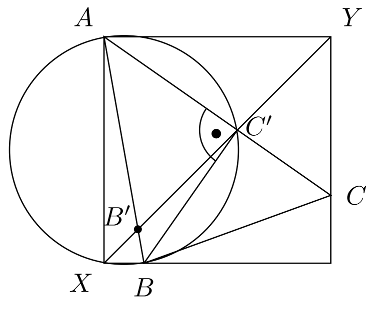
4. feladat I. megoldása: Könnyű ellenőrizni, hogy az $x^a = a$ egyenlet megoldása $(x = \sqrt[a]{a})$ a mi egyenletünket is kielégíti. Belátjuk, hogy más megoldás nincs. x helyébe 1-nél nem nagyobb számot helyettesítve a bal oldal 1-nél nem nagyobb lesz, azaz nem veheti fel az a értéket. Ha a bal oldalt mint x függvényét tekintjük, akkor az $(1, \infty)$ intervallumon szigorúan monoton függvényt kapunk. Így ezen az intervallumon legfeljebb egy gyöke lehet egyenletünknek.

---

5. feladat: Egy négyzetbe egy ABC háromszöget írunk úgy, hogy az A csúcs a négyzetnek is az egyik csúcsa és B, illetve C a négyzet A-n át nem haladó egy-egy oldalára esik. Tudjuk, hogy a háromszögnek az A csúcsnál lévő szöge 45^o-os. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszöget a négyzetünk A-n át nem haladó átlója két egyenlő területű részre osztja.

Dr. Pintér Ferenc (Nagykanizsa)

5. feladat I. megoldása: Az A-n át nem haladó átlót az AB és AC oldal messe a B' és C' pontokban. Az A-n át nem haldó átló két végpontja legyen X és Y úgy, hogy az átlón X, B', C' és Y ebben a sorrendben következzenek. A BC' szakasz A-ból és X-ből is 45^o-os szögben látszik, amiből A, X, B és C' egy körre esik. Mivel $AXB\angle$ derékszög, ezért $AC'B\angle$ is derékszög. Az ABC' háromszög A-nál lévő szöge 45^o, így a ABC' háromszög egyenlőszárú derékszögű háromszög. Speciálisan AB hossza $\sqrt{2}$-szöröse AC' hosszának. Teljesen hasonlóan AC hossza $\sqrt{2}$-szöröse AB' hosszának.



Az $AB'C'$ háromszög kétszeres területét kiszámíthatjuk az A-ban összefutó két oldal hosszának és a közbezárt szög szinuszának szorzataként. Az ABC háromszög kétszeres területét kiszámíthatjuk az A-ban összefutó két oldal hosszának és a közbezárt szög szinuszának szorzataként. A közbezárt szög szinusza mindkét területképletben közös. A két oldalhossz a második esetben $\sqrt{2}$-szörös. Így a második terület kétszerese az elsőnek. Az $AB'C'$ háromszög területe fele az ABC háromszög területének, ahogy bizonyítandó volt.

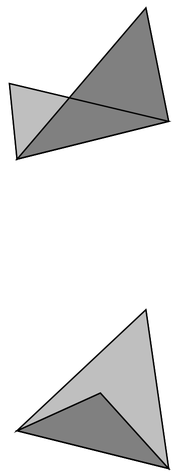
---

6. feladat: Adott 2007 pont a síkon úgy, hogy semelyik három ne essen egy egyenesre. Legyen P pontjaink egyike. Számoljuk meg, hogy azon háromszögek között, amelyek csúcsai a 2007 pont közül kerülnek ki, hány olyan van amely P-t belső pontként tartalmazza. Bizonyítsuk be, hogy a kapott szám páros.

Erdős Gábor (Nagykanizsa)

6. feladat I. megoldása: A P-n kívüli 2006 pont közül kell kikerülni a számolandó háromszögek csúcsainak.

A 2006 pontból az összes lehetséges módon válasszunk ki négy pontot és vizsgáljuk meg ezen négy pont hány olyan háromszöget határoz meg, amelyeknek P belső pontja. Pontnégyesünk lehet konvex, illetve konkáv helyzetű, de mindenképpen 0 vagy 2 háromszög fogja az adott P pontot lefedni. Ha a $\binom{2006}{4}$ darab négyesek mindegyikére összeadjuk a P-t tartalmazó háromszögek számát akkor páros számhoz jutunk.



Ez azonban nem a feladatban kért számolás. Az ott számolandó háromszögek mindegyikét ugyanannyiszor, 2003-szor számoltuk előbb. Tehát a feladatbeli háromszögek számát úgy kapjuk, hogy az előbbi páros számot elosztjuk 2003-mal. Ez egy páros szám lesz.