XVI. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Szeged, 2007. március 14-18.

11. osztály

1. feladat: Egy háromszög a, b és c hosszúságú oldalaira teljesül az

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}=\frac{3}{a+b+c}$$

összefüggés. Mekkor az a hosszúságú oldallal szemközti szög?

Bogdán Zoltán (Cegléd)

1. feladat I. megoldása: A nevezőkkel szorozva, majd rendezve egyenletünket az

$$a^2=b^2+c^2-bc$$

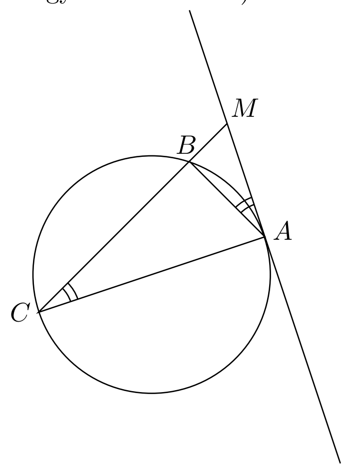
összefüggést kapjuk. A koszinusztételből $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$, ahol α az a hosszúságú oldallal szemközti szög. A két összefüggés összevetéséből $\cos\alpha=1/2$, azaz $\alpha=60^o$.

---

2. feladat: Egy ABC háromszög köréírt köréhez A-ban húzott érintő egyenes legyen t. Legyen M a BC oldalegyenes és t metszéspontja. Határozzuk meg az $\frac{MB}{MC}$ arányt k függvényében, ha $k=\frac{AB}{AC}$.

Sípos Elvira (Zenta)

2. feladat I. megoldása: $BCA\angle=BAM\angle$ hiszen mindkét szög a háromszögünk köréírt körében az AB ívhez tartozó kerületi szög (az egyik érintő szárú).



Ebből következik, hogy az AMB háromszög hasonló a CMA háromszöghöz. Így

$$\frac{CM}{MA}=\frac{AM}{MB}$$

$$\frac{MA}{AC}=\frac{MB}{BA}.$$

A második egyenlet négyzetét az első egyenlettel szorozva kapjuk:

$$\left(\frac{MA}{AC}\right)^2\frac{CM}{MA}=\left(\frac{MB}{BA}\right)^2\frac{AM}{MB}$$

$$\frac{MA\cdot CM}{AC^2}=\frac{MB\cdot AM}{BA^2}.$$

Rendezés után adódik, hogy $\frac{MB}{MC} = k^2$.

---

3. feladat: Bizonyítsuk be, hogy bármely $n+2$ darab egész szám közül kiválasztható kettő, amelyek négyzetének különbsége osztható $2n+1$-gyel.

Bencze Mihály (Brassó)

3. feladat I. megoldása: Az $a(2n+1)$, $a(2n+1)\pm 1$, $a(2n+1)\pm 2$, $a(2n+1)\pm 3, \ldots, a(2n+1)\pm n$ képletek az egész számok egy-egy halmazát adják, ha a az egész számokon fut keresztül és $\pm$ a két lehetséges előjel bármelyikének választását takarja. A $n+1$ képlet olyan, hogy minden egész számot pontosan egy képlet ír le (alkalmas a egész számmal és alkalmas előjellel). A skatulya-elvből $n+2$ egész szám esetén lesz kettő, amelyeket ugyanaz a képlet ír le. Ekkor azonban a két szám négyzete ugyanazt a maradékot adja $2n+1$-gyel osztva. Másképpen négyzeteik különbsége osztható lesz $2n+1$-gyel.

---

4. feladat: Hány megoldása van az

$$x^2 + xy + y^2 = 27$$

egyenletnek az egész számok között? Hány megoldás van a racionális számok között?

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

4. feladat I. megoldása: Az egyenletet négyszerezve és rendezve a következő (az eredetivel ekvivalens formához jutunk):

$$(2x+y)^2 + 3y^2 = 108.$$

Ha az egész számok körében dolgozunk, akkor az $N_1 + 3N_2 = 108$ formát használhatjuk, ahol N_1 és N_2 két négyzetszám. N_2 a $0, 1, 4, 9, 16, 25, 36$ közül kerülhet ki. A lehetőségek végigpróbálása az $N_1 = 81$ és $N_2 = 9$, illetve $N_1 = 0$ és $N_2 = 36$ megoldásokhoz vezet. Az első lehetőségből a $2x+y = \pm 9$, $y = \pm 3$ (négy darab) egyenletrendszerhez jutunk, a második lehetőségből a $2x+y = 0$, $y = \pm 6$ (két darab) egyenletrendszerhez jutunk. A lineáris egyenletrendszerek megoldása a következő hat egész gyökhöz vezet $(x,y): (3,3), (-6,3), (6,-3), (-3,-3), (-3,6), (3,-6)$.

Ha a racionális számok körében dolgozunk, akkor végtelen sok gyök lesz. Ezt a következőképpen indokolhatjuk. Az (x,y) gyököket a koordináta-rendszerben ábrázoljuk. Egy racionális gyöknek megfelelő (r,r') pont a $(3,3)$ ponttal összekötve egy racionális (m) meredekségű egyenest határoz meg. Ezen egyenes pontjainak koordinátáit az $x = 3+t$, $y = 3 + t\cdot m$ formulákból kapjuk, ha t végigfut a valós számok halmazán. Keressük meg ezen egyenes és az $x^2+xy+y^2 = 27$ egyenlettel leírt megoldáshalmaz közös pontjait. Helyettesítés után a $(3+t)^2 + (3+t)(3+t\cdot m) + (3+t\cdot m)^2 = 27$ egyenletet kapjuk. Rendezés után

$$(9m+9)t + (m^2+m+1)t^2 = 0$$

egyenletet kapjuk. Ennek egyik megoldása $t=0$, ami az egyenesünk $(3,3)$ pontjának felel meg. Ami természetesen egyenesünk és a megoldáshalmaz általunk választott metszéspontja. A másik megoldás $t = -\frac{9m+9}{m^2+m+1}$. Ez az $(3-\frac{9m+9}{m^2+m+1}, 3-\frac{9m^2+9m}{m^2+m+1})$ pontnak felel meg. Minden m racionális számra kapunk egy gyököt: $x = 3 - \frac{9m+9}{m^2+m+1} = \frac{3m^2-6m-6}{m^2+m+1}$ és $y = 3 - \frac{9m^2+9m}{m^2+m+1} = \frac{-6m^2-6m+3}{m^2+m+1}$.

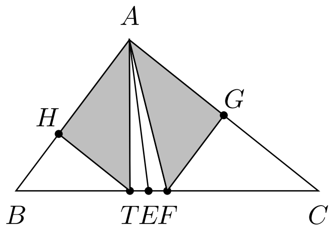
---

5. feladat: Egy háromszög súlyvonalának egyenesét a vele azonos csúcsból (A-ból) induló szögfelező egyenesére tükrözzük. Bizonyítsuk be, hogy a tükörkép az A-val szemközti oldalt az A-ban összefutó két oldal négyzetének arányában osztja.

Dr. Kántor Sándor (Debrecen)

5. feladat I. megoldása: Legyen a szóbanforgó háromszög ABC, ahol a jelöléseket úgy választottuk, hogy $ACB\angle \leq ABC\angle$ teljesüljön. Az A csúcsból induló súlyvonal AF, a szögfelező AE, a tükörkép és BC metszéspontja T.

Az AB-vel F-en át húzott párhuzamos AC-t G-ben metszi, az AC-vel T-n át húzott párhuzamos AB-t H-ban metszi.



Nyilvánvaló, hogy $CFG\triangle \sim CBA\triangle$ és $TBH\triangle \sim CBA\triangle$.

Könnyű belátni azt is, hogy $AGF\triangle \sim AHT\triangle$, mert az A-nál levő szögeik egyenlők a szögfelezés és a tükrözés miatt; továbbá $AGF\angle = AHT\angle$ a párhuzamosak miatt.

Így $\frac{AG}{GF} = \frac{AH}{HT}$, amit az ABC háromszög oldalainak szokásos a, b, c jelölésével és a $TB = x$ jelöléssel felírva:

$$\frac{\frac{b}{2}}{\frac{c}{2}} = \frac{c - \frac{cx}{a}}{\frac{xb}{a}}.$$

Ebből egyszerű számolással $\frac{a-x}{x} = \frac{b^2}{c^2}$ adódik, amit bizonyítani kellett.

---

6. feladat: Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$8x^2 = 2 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Árokszállási Tibor (Paks)

6. feladat I. megoldása: A jobb oldal csak $|x| < 1$ esetén van értelmezve. A $x = \cos\alpha$ helyettesítéssel élünk. Egyenletünk új alakja:

$$8\cos^2\alpha = 2 + \frac{1}{|\sin\alpha|}.$$

Ha $\sin\alpha > 0$, akkor egyenletünkben elhagyható az abszolútérték jele és rendezés után a következő alakhoz jutunk:

$$3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = \frac{1}{2}.$$

A bal oldali kifejezés $\sin 3\alpha$, amiből 3α értéke $\frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi$ vagy $\frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi$ valamely k egész számra. Ebből $x = \cos\alpha$ értékei $\cos\frac{\pi}{18}$, $\cos\frac{5\pi}{18}$, $\cos\frac{13\pi}{18}$, $\cos\frac{17\pi}{18}$ közül kerülnek ki.

Ha $\sin\alpha < 0$, akkor egyenletünk teljesen hasonlóan kezelhető, de új megoldásokat nem kapunk.