# *XVI. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny*

*Szeged, 2007. március 14-18.*

## 10. osztály

**1. feladat:** Hány olyan részhalmaza van az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmaznak, amely nem tartalmaz három szomszédos számot? Válaszoljuk meg a kérdést az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ és $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ halmazok esetén is.

*Erdős Gábor (Nagykanizsa)*

**2. feladat:** Egy $ABCD$ négyzet $AB$ oldalára mint átmérőre egy félkört rajzolunk a négyzeten kívülre. Legyen $P$ a félkör egy tetszőleges pontja. Kössük össze $P$-t a négyzet $C$, illetve $D$ csúcsával. Az összekötő szakaszok egy-egy pontban metszik az $AB$ oldalt és ezzel három szakaszra bontják. Bizonyítsuk be, hogy a három szakasz közül a középső hossza a két szélső szakasz hosszának mértani közepe.

*Dr. Katz Sándor (Bonyhád)*

**3. feladat:** Egy $ABC$ háromszög belsejében felveszünk egy $M$ pontot, majd összekötjük a három csúccsal. Az $AM$ egyenes messe a szemközti ($BC$) oldalt az $A'$ pontban. Hasonlóan legyenek $B'$ és $C'$ a $BM$ és $CM$ egyenesek és a megfelelő csúcsokkal szemközti oldalak metszéspontjai. Tudjuk, hogy $M$ felezi az $AA'$ szakaszt. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B} = 1.$$

*Dr. Pintér Ferenc és Bíró Bálint (Nagykanizsa, Eger)*

**4. feladat:** Határozzuk meg azokat a $p$ és $q$ természetes számokat, amelyekre a $p$, $q$, $p + q$ és $p^2 + q^2 - p - q - 1$ négy szám mindegyike prím.

*Oláh György (Komárom)*

**5. feladat:** Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\frac{1}{1-x} + \frac{3}{3-x} + \frac{5}{5-x} + \frac{7}{7-x} = (x-2)^2.$$

*Kacsó Ferenc (Marosvásárhely)*

**6. feladat:** A pozitív egész számok $A$ és $B$ halmaza hasonló, ha vannak olyan $a, b \geq 2$ természetes számok, hogy $A$ mindegyik elemét $a$-val szorozva ugyanahhoz a halmazhoz jussunk mintha $B$ mindegyik elemét $b$-vel szoroznánk. Bizonyítsuk be, hogy a pozitív egész számok halmaza nem bontható fel két diszjunkt halmazra úgy, hogy azok hasonlók legyenek.

*Farkas Csaba (Kolozsvár)*