XVI. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Szeged, 2007. március 14-18.

10. osztály

1. feladat: Hány olyan részhalmaza van az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmaznak, amely nem tartalmaz három szomszédos számot? Válaszoljuk meg a kérdést az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ és $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ halmazok esetén is.

Erdős Gábor (Nagykanizsa)

1. feladat I. megoldása: Az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmaznak $2^4 = 16$ részhalmaza van, amiből kettő háromelemű és egy négyelemű tartalmaz három szomszédos számot. A többi $16 - 3 = 13$ részhalmaz olyan, hogy nem tartalmaz három egymást követő elemet.

Az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz esetén külön számoljuk azokat a részhalmazokat, amelyeknek 5 az eleme és külön azokat, amelyeknek nem eleme. Ha 5 nem tartozik a részhalmazhoz, akkor az előző részfeladat 13 részhalmaza adja a hozzájárulást az összeszámoláshoz. Ha 5 eleme a részhalmaznak, akkor két alesetet különböztetünk meg aszerint, hogy 4 részhalmazunkhoz tartozik-e. Ha nem, akkor az 5 nevű elem mellett $\{1, 2, 3\}$ halmaz összes valódi részhalmaza szerepelhet. Ez 7 további összeszámolandó halmazt ad. Ha a 4 és 5 is részhalmazunkhoz tartozik, akkor 3 nem lehet benne, de $\{1, 2\}$ tetszőleges részhalmaza szerepelhet. Ez további 4 lehetőség. Összesen $13 + 7 + 4 = 24$ megfelelő részhalmazunk van.

Általában legyen r_n az $\{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$ halmaz azon részhalmazainak száma, amelyek nem tartalmaznak három szomszédos számot. A számolandó részhalmazokat a következő három tulajdonság három diszjunkt halmazba osztja:

a) n nem eleme,

b) n eleme, de $n - 1$ nem eleme,

c) n és $n - 1$ is eleme.

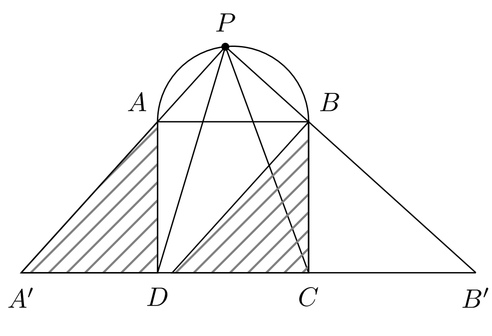
(ez utóbbi tulajdonság esetén $n-2$ szükségszerűen nem tartozik a megszámolandó részhalmazhoz). Az első tulajdonsággal rendelkező részhalmazok száma r_{n-1}, a második tulajdonsággal rendelkező részhalmazok száma r_{n-2}, a harmadik tulajdonsággal rendelkező részhalmazok száma r_{n-3}. Így $r_n = r_{n-1} + r_{n-2} + r_{n-3}$. Tudjuk, hogy $r_3 = 7$, $r_4 = 13$ és $r_5 = 24$. Ebből az r_n sorozat további elemei és köztük r_{10} is számolható: $\{r_n\}_{n=3}^{10} = 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504$. Azaz az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ halmaznak 504 részhalmaza nem tartalmaz három szomszédos számot.

---

2. feladat: Egy $ABCD$ négyzet AB oldalára mint átmérőre egy félkört rajzolunk a négyzeten kívülre. Legyen P a félkör egy tetszőleges pontja. Kössük össze P-t a négyzet C, illetve D csúcsával. Az összekötő szakaszok egy-egy pontban metszik az AB oldalt és ezzel három szakaszra bontják. Bizonyítsuk be, hogy a három szakasz közül a középső hossza a két szélső szakasz hosszának mértani közepe.

Dr. Katz Sándor (Bonyhád)

2. feladat I. megoldása: P-t kössük össze az A és B csúccsal. Az összekötő egyenesek messék a DC egyenest rendre az A' és B' pontokban.



Az AB szakasz három részre osztását a P pontból a DC egyenesre vetítve a három részszakasz vetített képe $A'D$, DC és CB' lesz. Mivel az AB vetített szakasz párhuzamos azzal az egyenessel, amelyre vetítettünk, ezért $A'D$, DC és CB' hossza arányos az AB szakasz három részének hosszaival. Elég belátni, hogy $A'D$ és CB' mértani közepe DC.

Az ADA' háromszöget vízszintesen toljuk el úgy, hogy az AD oldal a BC pozícióba kerüljön. Az eltolt háromszög a BCB' háromszöggel együtt egy derékszögű háromszöget alkot (a B-nél kialakuló szög egyenlő az $APB\angle$ szöggel, ami Thalesz tétele alapján derékszög). Erre a háromszögre a magasságtételt alkalmazva adódik az állítás, hiszen a háromszög átfogójához tartozó magassága BC, amely DC-vel azonos hosszúságú.

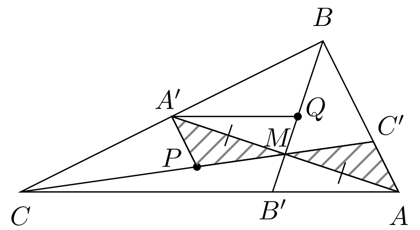
---

3. feladat: Egy ABC háromszög belsejében felveszünk egy M pontot, majd összekötjük a három csúccsal. Az AM egyenes messe a szemközti (BC) oldalt az A' pontban. Hasonlóan legyenek B' és C' a BM és CM egyenesek és a megfelelő csúcsokkal szemközti oldalak metszéspontjai. Tudjuk, hogy M felezi az AA' szakaszt. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B} = 1.$$

Dr. Pintér Ferenc és Bíró Bálint (Nagykanizsa, Eger)

3. feladat I. megoldása: A'-n keresztül húzzunk párhuzamost az AB oldallal. Ez messe P pontban a CC' szakaszt. Az $AC'M$ háromszög és MPA' háromszög hasonló és az $AM = MA'$ feltétel miatt egybevágó. Így az $A'P$ szakasz hossza azonos az AC' szakasz hosszával. $AC'/C'B$ a CPA' és $CC'B$ hasonló háromszögek hasonlósági aránya. Ez másképpen $A'C/BC$.



Teljesen hasonlóan $AB'/B'C = BA'/BC$. Így

$$\frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{BC} + \frac{A'C}{BC} = \frac{BA' + A'C}{BC} = 1.$$

---

4. feladat: Határozzuk meg azokat a p és q természetes számokat, amelyekre a p, q, $p+q$ és $p^2+q^2-p-q-1$ négy szám mindegyike prím.

Oláh György (Komárom)

4. feladat I. megoldása: Legyen p és q olyan, hogy a feladatbeli négy szám prím. Ekkor p és q legalább 2, $p+q$ legalább 4. Mivel $p+q$ prím, ezért páratlan, azaz p és q paritása különbözik. Szimmetria okokból feltehetjük, hogy q páros (p páratlan). q prímsége miatt $q = 2$ és tudjuk, hogy p, $p+2$, p^2-p+1 prímszámok.

p, $p+1$ és $p+2$ közül az egyik hárommal osztható. $p+2$ legalább négy és prím, így nem lehet hárommal osztható. Két eset marad.

1. eset: p osztható hárommal. p prím, így csak $p = 3$ lehetséges. Ellenőrizhető, hogy ez megoldást is ad.

2. eset: $p+1$ osztható hárommal. Ekkor $p^2-p+1 = (p+1)^2-3p$ egyrészt prím, másrészt hárommal osztható. Így $p^2-p+1 = 3$, ahonnan a p természetes szám értéke csak 2 lehet. Ekkor azonban $p+q = 4$, így nem kapunk új megoldást.

Csak a $p = 3$, $q = 2$, illetve $p = 2$, $q = 3$ számpárok a megfelelőek.

---

5. feladat: Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\frac{1}{1-x} + \frac{3}{3-x} + \frac{5}{5-x} + \frac{7}{7-x} = (x-2)^2.$$

Kacsó Ferenc (Marosvásárhely)

5. feladat I. megoldása: Rendezve:

$$\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) + \left(\frac{3}{3-x} - 1\right) + \left(\frac{5}{5-x} - 1\right) + \left(\frac{7}{7-x} - 1\right) = (x-2)^2 - 4,$$

$$x\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{3-x} + \frac{1}{5-x} + \frac{1}{7-x} + 4 - x\right) = 0.$$

A szorzat úgy lehet 0, ha az első tényező 0 (ezzel megkaptuk az $x_1 = 0$ első gyököt), vagy a második tényező 0. A második lehetőségre vonatkozó egyenletet továbbalakítjuk:

$$\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{7-x}\right) + \left(\frac{1}{3-x} + \frac{1}{5-x}\right) + (4-x) = 0.$$

A két zárójelben a törteket közös nevezőre hozva $4 - x$ közös tényező lesz mindegyik tagban:

$$(4-x)\left(\frac{2}{x^2-8x+7} + \frac{2}{x^2-8x+15} + 1\right) = 0.$$

A szorzat ismét akkor lesz 0, ha első tényezője 0 (ez adja második gyököt, $x_2 = 4$-et), vagy a második tényezője 0. A második lehetőséghez tartozó gyökök megkereséséhez vezessük be a $t = x^2 - 8x + 11$ új változót:

$$\frac{2}{t-4} + \frac{2}{t+4} + 1 = 0.$$

Ebből $t^2 + 4t - 16 = 0$, $t_{1,2} = -2 \pm 2\sqrt{5}$. A $t = x^2 - 8x + 11$ összefüggés $t + 5 = (x-4)^2$ alakban is írható. Valós x-gyököt akkor kapunk, ha $t + 5$ nem-negatív, azaz $t = -2 + 2\sqrt{5}$. Ekkor $x_{3,4} = 4 \pm \sqrt{3 + 2\sqrt{5}}$.

---

6. feladat: A pozitív egész számok A és B halmaza hasonló, ha vannak olyan $a, b \geq 2$ természetes számok, hogy A mindegyik elemét a-val szorozva ugyanahhoz a halmazhoz jussunk mintha B mindegyik elemét b-vel szoroznánk. Bizonyítsuk be, hogy a pozitív egész számok halmaza nem bontható fel két diszjunkt halmazra úgy, hogy azok hasonlók legyenek.

Farkas Csaba (Kolozsvár)

6. feladat I. megoldása: A feladat hibásan lett kitűzve, az $(a, b) = 1$ feltétel kimaradt. Ebben az esetben a megoldás a következő: Tegyük fel, hogy mégis ketté tudjuk osztani két diszjunkt hasonló (A és B) halmazra a pozitív egészek halmazát. Legyen a és b a hasonlóságot bizonyító számok. Feltehető, hogy $1 \in A$. Ekkor $a \cdot 1$ a B halmaz b-szeresei között lenne, ez azonban ellentmondás, hiszen $b \not| a$.

A kitűzött feladatra azonban lehet ellenpéldát találni, legyen A azon pozitív egészek halmaza, melyek prímtényezős felbontásában a 2 páros kitevőn szerepel, B pedig azoké, melyekben nem. Ebben az esetben $a = 4$, $b = 2$ választással a halmazok láthatóan hasonlók lesznek.